

Ferdinand P. Beer ■ E. Russell Johnston, Jr. ■ Elliot R. Eisenberg

MECÁNICA VECTORIAL *para* INGENIEROS

Estática

Octava edición

The background of the cover is a photograph of a multi-level highway interchange at night. The concrete structures of the bridge and overpass are illuminated by warm yellow lights, creating a strong geometric pattern of lines and curves. The sky is a deep purple, and the lower part of the image shows the glowing lights of the highway and surrounding area.

Mc
Graw
Hill

Octava edición
**MECÁNICA VECTORIAL
PARA INGENIEROS**

Estática

FERDINAND P. BEER

Lehigh University (finitado)

E. RUSSELL JOHNSTON, JR.

University of Connecticut

ELLIOT R. EISENBERG

The Pennsylvania State University

Con la colaboración de

David F. Mazurek

U.S. Coast Guard Academy

Revisión técnica:

Ing. Javier León Cárdenas

Jefe de Ingeniería Mecánica

Universidad La Salle, campus Ciudad de México



MÉXICO • BOGOTÁ • BUENOS AIRES • CARACAS • GUATEMALA
LISBOA • MADRID • NUEVA YORK • SAN JUAN • SANTIAGO
AUCKLAND • LONDRES • MILÁN • MONTREAL • NUEVA DELHI
SAN FRANCISCO • SINGAPUR • SAN LUIS • SIDNEY • TORONTO

Director Higher Education: Miguel Ángel Toledo Castellanos

Director editorial: Ricardo A. del Bosque Alayón

Editor sponsor: Pablo Eduardo Roig Vázquez

Editora de desarrollo: Lorena Campa Rojas

Supervisor de producción: Zeferino García García

Traducción: Jesús Elmer Murrieta Murrieta

MECÁNICA VECTORIAL PARA INGENIEROS ESTÁTICA

Octava edición

Prohibida la reproducción total o parcial de esta obra,
por cualquier medio, sin la autorización escrita del editor.



**McGraw-Hill
Interamericana**

DERECHOS RESERVADOS © 2007, respecto a la octava edición en español por
McGRAW-HILL/INTERAMERICANA EDITORES, S.A. DE C.V.

A Subsidiary of The McGraw-Hill Companies, Inc.

Corporativo Punta Santa Fe

Prolongación Paseo de la Reforma 1015, Torre A

Piso 17, Colonia Desarrollo Santa Fe

Delegación Álvaro Obregón

C.P. 01376, México, D.F.

Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana, Reg. Núm. 736

Créditos de las fotografías de portada: Portada frontal: ©Thompson/CORBIS; Contraportada: Superior: ©Richard Cummins/CORBIS; Central: ©Ron Watts/CORBIS; Inferior: ©Mark Tomalty/Masterfile.

Fotografía de la portada: A menudo, los ingenieros se enfrentan a las necesidades en conflicto de una sociedad que exige, por un lado, la expansión de la infraestructura básica de transporte, comunicaciones y generación y transmisión de energía y, por otro, el mantenimiento de áreas verdes intactas. Este conflicto entre las construcciones y los paisajes naturales puede resolverse en parte mediante una ubicación adecuada y un énfasis especial en la estética, además de las especificaciones técnicas y los costos necesarios en cualquier diseño. Para el distribuidor entre la autopista North Dallas y la carretera Presidente George Bush que se muestra en la fotografía, se logró un sentido de armonía y balance con el entorno a través del cuidadoso dimensionamiento y diseño de los carriles de tráfico y de los pilares que los sostienen. El camino, que consiste en múltiples travesaños de acero bajo una plancha de concreto, se sostiene por medio de pilares con cabeza de martillo y vigas en voladizo que se proyectan desde los pilares.

La sección de créditos de este libro comienza en la página 603 y es considerada como una extensión de la página legal.

ISBN-13: 978-970-6103-9

ISBN-10: 970-10-6103-9

(ISBN: 970-10-4469-X edición anterior)

Traducido de la octava edición en inglés de la obra VECTOR MECHANICS FOR ENGINEERS. STATICS.

Copyright © 2007 by The McGraw-Hill Companies, Inc. All rights reserved. ISBN-10: 0-07-297687-X;

ISBN-13: 978-0-07-297687-8

1234567890

09865432107

Impreso en China
Impreso por CTPS

*Printed in China
Printed by CTPS*

MECÁNICA VECTORIAL PARA INGENIEROS

Estática

Acerca de los autores

Los autores de esta obra con frecuencia son cuestionados acerca de cómo fue que, estando uno en Lehigh y otro en la University of Connecticut, empezaron a escribir sus libros juntos y cómo logran seguir colaborando en las revisiones subsecuentes.

La respuesta a estas preguntas es sencilla. Russ Johnston inició su carrera académica en el departamento de ingeniería civil y mecánica de Lehigh University y allí conoció a Ferd Beer, quien había comenzado a trabajar en ese departamento dos años antes y estaba a cargo de los cursos de mecánica.

Ferd se sintió muy complacido al descubrir que el joven contratado para impartir cursos de ingeniería estructural a nivel de posgrado no sólo estaba dispuesto, sino también ansioso por ayudarlo a reorganizar los cursos de mecánica. Ambos creían que dichos cursos deberían impartirse a partir de unos cuantos principios básicos, y que los distintos conceptos involucrados serían mejor comprendidos y recordados por los estudiantes si se les presentaban en forma gráfica. Juntos escribieron apuntes para las clases de estática y dinámica, a los cuales posteriormente agregaron problemas que supusieron resultarían interesantes para los futuros ingenieros, y poco después produjeron el manuscrito de la primera edición de *Mecánica para ingenieros*.

Al publicarse la segunda edición de *Mecánica para ingenieros* y la primera de *Mecánica vectorial para ingenieros*, Russ Johnston estaba en el Worcester Polytechnic Institute y para las ediciones subsecuentes en la University of Connecticut. Mientras tanto, Ferd y Russ habían asumido funciones administrativas en sus respectivos departamentos y se dedicaban a la investigación, la consultoría, y a asesorar estudiantes de posgrado —Ferd en el área de procesos estocásticos y vibraciones aleatorias y Russ en la de estabilidad elástica y en diseño y análisis estructurales—. Sin embargo, su interés por mejorar la enseñanza de los cursos básicos de mecánica no había disminuido y continuaron impartiendo los mientras revisaban sus libros y comenzaban a escribir el manuscrito de la primera edición de *Mecánica de materiales*.

La colaboración entre estos dos autores ha abarcado muchos años y muchas revisiones exitosas de todos sus libros, y las contribuciones de Ferd y Russ a la educación en ingeniería los han hecho acreedores de numerosas distinciones y reconocimientos. Recibieron el Western Electric Fund Award por parte de sus respectivas secciones regionales de la American Society for Engineering Education por su excelencia en la instrucción de estudiantes de ingeniería y, además, el Distinguished Educator Award de la división de mecánica de esa misma asociación. A partir de 2001, el reconocimiento denominado New Mechanics Educator Award de la división de mecánica ha sido nombrado Beer and Johnston en honor a estos autores.

Ferdinand P. Beer. Nacido en Francia y educado en Francia y Suiza, obtuvo una maestría en La Sorbona y un doctorado en ciencias en el área de mecánica teórica en la Universidad de Ginebra. Emigró a Estados Unidos después de servir en el ejército francés durante la primera parte de la Segunda Guerra Mundial, e impartió clases por cuatro años en el Williams College en el programa conjunto de ingeniería y artes Williams-MIT. Después de su servicio en el Williams College, Ferd ingresó al profesorado de Lehigh University donde enseñó durante 37 años. Ocupó varios puestos, incluyendo el de profesor distinguido de la universidad y director del departamento de mecánica e ingeniería mecánica. En 1995 recibió un grado honorario de Doctor en Ingeniería por la Lehigh University.

E. Russell Johnston, Jr. Nacido en Filadelfia, Russ posee un título de ingeniero civil de la University of Delaware y un doctorado en ciencias en el área de ingeniería estructural del Massachusetts Institute of Technology. Impartió clases en Lehigh University y en Worcester Polytechnic Institute antes de ingresar al profesorado de la University of Connecticut, donde ocupó el puesto de director del departamento de ingeniería civil y enseñó durante 26 años. En 1991 recibió el Outstanding Civil Engineer Award, sección Connecticut, que otorga la American Society of Civil Engineers.

Elliot R. Eisenberg. Posee una licenciatura y una maestría en ingeniería, ambas de la Cornell University. Elliot ha enfocado sus actividades en el servicio profesional y la enseñanza; en 1992 su trabajo fue reconocido por la American Society of Mechanical Engineers al distinguirlo con la medalla Ben C. Sparks por sus contribuciones a la ingeniería mecánica y a la educación en tecnología de la ingeniería mecánica, así como por sus servicios en la American Society for Engineering Education. Elliot impartió clases durante 32 años, incluyendo 29 en Penn State donde se le han otorgado premios por enseñanza y asesoría.

David F. Mazurek. Posee una licenciatura en ingeniería oceánica y una maestría en ingeniería civil del Florida Institute of Technology, además de un doctorado en ingeniería civil de la University of Connecticut. Fue empleado por la Electric Boat Division of General Dynamics Corporation e impartió clases en Lafayette College antes de pertenecer a la U. S. Coast Guard Academy, en donde ha estado desde 1990. Ha prestado sus servicios en American Railway Engineering y Maintenance of Way Association's Committee 15—Steel Structures durante los últimos 14 años. Su interés profesional incluye la ingeniería de puentes, torres esbeltas, ciencia forense estructural y diseño resistente a explosiones.

Contenido

Prefacio xiv

Lista de símbolos xx

1

INTRODUCCIÓN

1

- 1.1 ¿Qué es la mecánica 2
- 1.2 Conceptos y principios fundamentales 2
- 1.3 Sistemas de unidades 5
- 1.4 Conversión de un sistema de unidades a otro 10
- 1.5 Método para la solución de problemas 11
- 1.6 Exactitud numérica 13

2

ESTÁTICA DE PARTÍCULAS

15

- 2.1 Introducción 16
 - Fuerzas en un plano** 16
- 2.2 Fuerza sobre una partícula. Resultante de dos fuerzas 16
- 2.3 Vectores 17
- 2.4 Adición o suma de vectores 18
- 2.5 Resultante de varias fuerzas concurrentes 20
- 2.6 Descomposición de una fuerza en sus componentes 21
- 2.7 Componentes rectangulares de una fuerza. Vectores unitarios 27
- 2.8 Adición de fuerzas sumando sus componentes x y y 30
- 2.9 Equilibrio de una partícula 35
- 2.10 Primera ley del movimiento de Newton 36
- 2.11 Problemas relacionados con el equilibrio de una partícula.
Diagramas de cuerpo libre 36
 - Fuerzas en el espacio** 45
- 2.12 Componentes rectangulares de una fuerza en el espacio 45
- 2.13 Fuerza definida en términos de su magnitud y dos puntos sobre su
línea de acción 48

2.14	Adición de fuerzas concurrentes en el espacio	49
2.15	Equilibrio de una partícula en el espacio	57
Repaso y resumen del capítulo 2		64
Problemas de repaso		67
Problemas de computadora		69

3

CUERPOS RÍGIDOS: SISTEMAS EQUIVALENTES DE FUERZA

73

3.1	Introducción	74
3.2	Fuerzas externas e internas	74
3.3	Principio de transmisibilidad. Fuerzas equivalentes	75
3.4	Producto vectorial de dos vectores	77
3.5	Productos vectoriales expresados en términos de componentes rectangulares	79
3.6	Momento de una fuerza con respecto a un punto	81
3.7	Teorema de Varignon	83
3.8	Componentes rectangulares del momento de una fuerza	83
3.9	Producto escalar de dos vectores	93
3.10	Producto triple mixto de tres vectores	95
3.11	Momento de una fuerza con respecto a un eje dado	97
3.12	Momento de un par	107
3.13	Pares equivalentes	108
3.14	Adición o suma de pares	110
3.15	Los pares pueden representarse por medio de vectores	110
3.16	Descomposición de una fuerza dada en una fuerza en O y un par	111
3.17	Reducción de un sistema de fuerzas a una fuerza y un par	122
3.18	Sistemas equivalentes de fuerzas	123
3.19	Sistemas equipolentes de vectores	124
3.20	Otras reducciones de un sistema de fuerzas	124
*3.21	Reducción de un sistema de fuerzas a una llave de torsión o torsor	127
Repaso y resumen del capítulo 3		146
Problemas de repaso		151
Problemas de computadora		153

4

EQUILIBRIO DE CUERPOS RÍGIDOS

157

4.1	Introducción	158
4.2	Diagrama de cuerpo libre	159
Equilibrio en dos dimensiones		160
4.3	Reacciones en los puntos de apoyo y conexiones de una estructura bidimensional	160
4.4	Equilibrio de un cuerpo rígido en dos dimensiones	162
4.5	Reacciones estáticamente indeterminadas. Restricciones parciales	163
4.6	Equilibrio de un cuerpo sujeto a dos fuerzas	183
4.7	Equilibrio de un cuerpo sujeto a tres fuerzas	184
Equilibrio en tres dimensiones		191
4.8	Equilibrio de un cuerpo rígido en tres dimensiones	191

5

FUERZAS DISTRIBUIDAS : CENTROIDES Y CENTROS DE GRAVEDAD

219

6

ANÁLISIS DE ESTRUCTURAS

285

7 FUERZAS EN VIGAS Y CABLES

355

*7.1	Introducción	356
*7.2	Fuerzas internas en elementos	356
	Vigas	363
*7.3	Diferentes tipos de cargas y apoyos	363
*7.4	Fuerza cortante y momento flector en una viga	364
*7.5	Diagramas de fuerza cortante y de momento flector	366
*7.6	Relaciones entre carga, fuerza cortante y momento flector	374
	Cables	385
*7.7	Cables con cargas concentradas	385
*7.8	Cables con cargas distribuidas	386
*7.9	Cable parabólico	387
*7.10	Catenaria	396
	Repaso y resumen del capítulo 7	404
	Problemas de repaso	407
	Problemas de computadora	410

8 FRICCIÓN

413

8.1	Introducción	414
8.2	Leyes de la fricción seca. Coeficientes de fricción	414
8.3	Ángulos de fricción	417
8.4	Problemas que involucran fricción seca	418
8.5	Cuñas	433
8.6	Tornillos de rosca cuadrada	433
*8.7	Chumaceras. Fricción en ejes	442
*8.8	Cojinetes de empuje. Fricción en discos	444
*8.9	Fricción en ruedas. Resistencia a la rodadura o rodamiento	445
*8.10	Fricción en bandas	452
	Repaso y resumen del capítulo 8	463
	Problemas de repaso	466
	Problemas de computadora	469

9 FUERZAS DISTRIBUIDAS: MOMENTOS DE INERCIA

473

9.1	Introducción	474
	Momentos de inercia de áreas	474
9.2	Segundo momento o momento de inercia de un área	475
9.3	Determinación del momento de inercia de un área por integración	476
9.4	Momento polar de inercia	477
9.5	Radio de giro de un área	478
9.6	Teorema de los ejes paralelos o teorema de Steiner	485
9.7	Momentos de inercia de áreas compuestas	486
*9.8	Producto de inercia	499
*9.9	Ejes principales y momentos principales de inercia	500
*9.10	Círculo de Mohr para momentos y productos de inercia	508

	Momentos de inercia de masas	514
9.11	Momento de inercia de una masa	514
9.12	Teorema de los ejes paralelos	516
9.13	Momentos de inercia de placas delgadas	517
9.14	Determinación del momento de inercia de un cuerpo tridimensional por integración	518
9.15	Momentos de inercia de cuerpos compuestos	518
*9.16	Momento de inercia de un cuerpo con respecto a un eje arbitrario que pasa por el punto O . Productos de inercia de masa	533
*9.17	Elipsoide de inercia. Ejes principales de inercia	534
*9.18	Determinación de los ejes y los momentos principales de inercia de un cuerpo de forma arbitraria	536
	Repaso y resumen del capítulo 9	547
	Problemas de repaso	553
	Problemas de computadora	556

10 MÉTODO DEL TRABAJO VIRTUAL

*10.1	Introducción	560	
*10.2	Trabajo de una fuerza	560	
*10.3	Principio del trabajo virtual	563	
*10.4	Aplicaciones del principio del trabajo virtual	564	
*10.5	Máquinas reales. Eficiencia mecánica	566	
*10.6	Trabajo de una fuerza durante un desplazamiento finito		580
*10.7	Energía potencial	582	
*10.8	Energía potencial y equilibrio	583	
*10.9	Estabilidad del equilibrio	584	
Repaso y resumen del capítulo 10		594	
Problemas de repaso		597	
Problemas de computadora		599	

Apéndice FUNDAMENTOS PARA LA CERTIFICACIÓN EN INGENIERÍA EN ESTADOS UNIDOS

	601
Créditos de las fotografías	603
Índice analítico	605
Respuestas a problemas	611

Prefacio

OBJETIVOS

El objetivo principal de un primer curso de mecánica debe ser desarrollar en el estudiante de ingeniería la capacidad de analizar cualquier problema en forma lógica y sencilla, y la de aplicar para su solución unos cuantos principios básicos perfectamente comprendidos. Se espera que este texto, diseñado para un primer curso de estática impartido en el segundo año de estudios, y el siguiente, *Mecánica vectorial para ingenieros: Dinámica*, permitirán que el profesor alcance este objetivo.

ENFOQUE GENERAL

En la parte inicial del texto se introduce el análisis vectorial, el cual se utiliza en la presentación y exposición de los principios fundamentales de la mecánica. Los métodos vectoriales se usan también para resolver diversos problemas, especialmente en tres dimensiones, donde estas técnicas permiten obtener la solución de un modo más conciso y simple. Sin embargo, el énfasis del libro se mantiene en el correcto aprendizaje de los principios de la mecánica y su aplicación para resolver problemas de ingeniería, por lo que el análisis vectorial se presenta, primordialmente, como una herramienta práctica.¹

Se introducen aplicaciones prácticas desde una etapa inicial. Una de las características del enfoque usado en estos tomos es que la mecánica de *partículas* se ha separado en forma clara de la mecánica de *cuerpos rígidos*. Este enfoque hace posible considerar aplicaciones prácticas simples en una etapa inicial y posponer la introducción de los conceptos más avanzados. Por ejemplo:

- En *Estática*, la estática de partículas se estudia primero (capítulo 2), después de haber presentado las reglas para la suma y resta de vectores, y el principio de equilibrio de una partícula se aplica inmediatamente a situaciones prácticas que involucran sólo

¹En un libro relacionado, *Mecánica para ingenieros: Estática*, cuarta edición, el uso del álgebra vectorial se limita a la suma y resta de vectores.

fuerzas concurrentes. La estática de cuerpos rígidos se considera en los capítulos 3 y 4. En el capítulo 3 se introducen los productos escalar y vectorial de dos vectores y se utilizan para definir el momento de una fuerza con respecto a un punto y a un eje. La presentación de estos nuevos conceptos es seguida por la exposición rigurosa y completa de los sistemas de fuerzas equivalentes que conducen, en el capítulo 4, a muchas aplicaciones prácticas que involucran el equilibrio de cuerpos rígidos bajo la acción de sistemas generales de fuerzas.

- En *Dinámica* se observa la misma división. Se introducen los conceptos básicos de fuerza, masa y aceleración, de trabajo y energía, y de impulso y momentum, y se aplican en primera instancia a la resolución de problemas que sólo involucran partículas. De esta forma, los estudiantes pueden familiarizarse por sí mismos con los tres métodos básicos utilizados en dinámica, y aprender sus respectivas ventajas antes de enfrentar las dificultades asociadas con el movimiento de cuerpos rígidos.

Los conceptos nuevos se presentan en términos simples.

Como este texto está diseñado para un primer curso sobre estática, los conceptos nuevos se presentan en términos simples y cada paso se explica en forma detallada. Por otro lado, este enfoque alcanza una madurez definitiva al analizar los aspectos más relevantes de los problemas considerados, y al ampliar los métodos de aplicabilidad general. Por ejemplo, los conceptos de restricciones parciales y de indeterminación estática se introducen al principio del texto para ser usados en todo el libro.

Los principios fundamentales se ubican en el contexto de aplicaciones simples.

Se enfatiza el hecho de que la mecánica es, esencialmente, una ciencia *deductiva* que se basa en algunos principios fundamentales. Las derivaciones se presentan siguiendo su secuencia lógica y con todo el rigor requerido a este nivel. Sin embargo, en virtud de que el proceso de aprendizaje es primordialmente *inductivo*, las aplicaciones más simples se consideran primero. Por ejemplo:

- La estática de partículas antecede a la estática de cuerpos rígidos, y los problemas que involucran fuerzas internas se posponen hasta el capítulo 6.
- En el capítulo 4 se consideran primero los problemas de equilibrio que involucran sólo a fuerzas coplanares, y se resuelven por medio del álgebra ordinaria, mientras que los problemas que involucran fuerzas tridimensionales, los cuales requieren el uso completo del álgebra vectorial, se exponen en la segunda parte de dicho capítulo.

Se emplean diagramas de cuerpo libre para resolver problemas de equilibrio y expresar la equivalencia de sistemas de fuerzas.

Los diagramas de cuerpo libre se introducen al principio y se enfatiza su importancia a lo largo de todo el texto. No sólo se emplean para resolver problemas de equilibrio sino también para expresar la equivalencia de dos sistemas de fuerzas o, de modo más general, de dos sistemas de vectores. La ventaja de este enfoque se vuelve evidente en el estudio de la dinámica de cuerpos rígidos, donde se

utiliza para resolver problemas tridimensionales y bidimensionales. Se pudo lograr una comprensión más intuitiva y completa de los principios fundamentales de la dinámica al poner mayor énfasis en las “ecuaciones de diagramas de cuerpo libre” en lugar de en las ecuaciones algebraicas estándar de movimiento. Este enfoque, introducido en 1962 en la primera edición de *Mecánica vectorial para ingenieros*, ha obtenido hasta la fecha una amplia aceptación entre los profesores de mecánica en Estados Unidos. Por tanto, para la resolución de todos los problemas resueltos de este libro, se prefiere su utilización en lugar del método de equilibrio dinámico y de las ecuaciones de movimiento.

Se utilizan presentaciones en distintos tonos para distinguir los vectores. El color se ha usado no sólo para mejorar la calidad de las ilustraciones, sino también para ayudar a los estudiantes a distinguir entre los diversos tipos de vectores que pueden encontrar. En virtud de que no había intención de establecer un código de color para el texto, en un capítulo dado se utiliza el mismo color para representar el mismo tipo de vector. Por ejemplo, a lo largo del tomo de *Estática*, el rojo se utiliza en forma exclusiva para representar fuerzas y pares, mientras que los vectores de posición se muestran en azul y las dimensiones en negro. Esto vuelve más fácil para los estudiantes identificar las fuerzas que actúan sobre una partícula o cuerpo rígido dados y comprender los problemas resueltos y otros ejemplos proporcionados en el libro.

Se mantiene, en forma consistente, un cuidadoso balance entre las unidades SI y unidades de uso común en Estados Unidos. Debido a la tendencia que existe en la actualidad en el gobierno y la industria estadounidenses de adoptar el Sistema Internacional de Unidades (unidades métricas SI), las unidades SI que se usan con mayor frecuencia en mecánica se introducen en el capítulo 1 y se emplean en todo el libro. Aproximadamente la mitad de los problemas resueltos y 60 por ciento de los problemas de tarea están planteados en este sistema de unidades, mientras que el resto se proporciona en las unidades de uso común en Estados Unidos. Los autores creen que este enfoque es el que se adecuará mejor a las necesidades de los estudiantes, quienes, como ingenieros, tendrán que dominar los dos sistemas de unidades.

También se debe reconocer que el uso de ambos sistemas de unidades significa más que aplicar factores de conversión. Como el sistema de unidades SI es absoluto basado en el tiempo, la longitud y la masa, mientras que el sistema inglés es un sistema gravitacional basado en el tiempo, la longitud y la fuerza, se requieren diferentes enfoques para la solución de muchos problemas. Por ejemplo, cuando se usan las unidades SI, por lo general, un cuerpo se especifica mediante su masa expresada en kilogramos; en la mayor parte de los problemas de estática será necesario determinar el peso del cuerpo en newtons, para lo cual se requiere un cálculo adicional. Por otro lado, cuando se aplican las unidades de uso común en Estados Unidos, un cuerpo se especifica mediante su peso en libras y, en problemas de dinámica, se requerirá un cálculo adicional para determinar su masa en slugs (o $\text{lb} \cdot \text{s}^2/\text{ft}$). Por tanto, los autores creen que los problemas que se les asignen a los estudiantes deben incluir ambos sistemas de unidades.

En las secciones opcionales se tratan temas avanzados o especializados. En el libro se incluye un gran número de secciones opcionales identificadas mediante asteriscos y, por tanto, se distinguen fácilmente de aquellas que constituyen la parte fundamental de un curso básico de estática. Estas secciones pueden omitirse sin perjudicar la comprensión del resto del texto.

Entre los temas cubiertos en las secciones adicionales se encuentran la reducción de un sistema de fuerzas a una llave de torsión, aplicaciones a hidrostática, diagramas de fuerza cortante y momento flector, equilibrio de cables, productos de inercia y círculo de Mohr, la determinación de los ejes principales y momentos de inercia de un cuerpo en forma arbitraria, y el método del trabajo virtual. Las secciones sobre vigas son especialmente útiles cuando el curso de estática es seguido inmediatamente por un curso de mecánica de materiales, mientras que las partes que tratan acerca de las propiedades de inercia de cuerpos tridimensionales fueron pensadas primordialmente para los estudiantes que después estudiarán, en dinámica, el movimiento tridimensional de cuerpos rígidos.

El material presentado en el libro y la mayor parte de los problemas no requieren conocimiento matemático previo superior al álgebra, la trigonometría y el cálculo elemental; todos los conocimientos de álgebra elemental necesarios para comprender el texto se presentan con detalle en los capítulos 2 y 3. En general, se pone mayor énfasis en la comprensión adecuada de los conceptos matemáticos básicos incluidos que en la manipulación de fórmulas matemáticas. Al respecto, se debe mencionar que la determinación de los centroides de áreas compuestas precede al cálculo de centroides por integración, lo cual posibilita establecer firmemente el concepto de momento de un área antes de introducir el uso de integrales.

ORGANIZACIÓN DE LOS CAPÍTULOES Y CARACTERÍSTICAS PEDAGÓGICAS

Introducción del capítulo. Cada capítulo comienza con una introducción que establece el propósito y los objetivos del mismo, y en donde se describe en términos sencillos el material que será cubierto y sus aplicaciones en la resolución de problemas de ingeniería. Los lineamientos del capítulo proporcionan a los estudiantes una visión previa de los tópicos que éste incluye.

Lecciones en el capítulo. El cuerpo del texto está dividido en unidades, cada una de las cuales consiste en una o más secciones de teoría, uno o varios problemas resueltos, y una gran cantidad de problemas de tarea. Cada unidad corresponde a un tema bien definido que, por lo general, puede ser cubierto en una lección. Sin embargo, en ciertos casos el profesor encontrará que es deseable dedicar más de una lección a un tópico en particular.

Problemas resueltos. Los problemas resueltos se plantean de manera muy similar a la que usarán los estudiantes cuando resuelvan los problemas que se les asignen. Por tanto, estos problemas cumplen el doble propósito de ampliar el texto y demostrar la forma de trabajo clara y ordenada que los estudiantes deben cultivar en sus propias soluciones.

Resolución de problemas en forma independiente. Entre los problemas resueltos y los de tarea, para cada lección se incluye una sección titulada *Resolución de problemas en forma independiente*. El propósito de estas secciones es ayudar a los estudiantes a organizar mentalmente la teoría ya cubierta en el texto y los métodos de resolución de los problemas resueltos, de manera que puedan resolver con mayor éxito los problemas de tarea. Además, en estas secciones también se incluyen sugerencias y estrategias específicas que les permitirán enfrentar de manera más eficiente cualquier problema que se les asigne.

Series de problemas de tarea. La mayoría de los problemas son de naturaleza práctica y deben llamar la atención del estudiante de ingeniería. Sin embargo, están diseñados para ilustrar el material presentado en el texto y para ayudar a los estudiantes a comprender los principios de la mecánica. Los problemas se han agrupado de acuerdo con las partes del material que ilustran y se presentan en orden de dificultad creciente. Los problemas que requieren atención especial están señalados con asteriscos. Al final del texto se proporcionan las respuestas correspondientes a un 70 por ciento de los problemas propuestos; y aquellos para los cuales no se da respuesta se indican en el libro escribiendo su número en cursivas.

Repaso y resumen del capítulo. Cada capítulo finaliza con un repaso y un resumen del material cubierto en el mismo. Las notas al margen se utilizan para ayudar al estudiante a organizar su trabajo de revisión, además se han incluido referencias cruzadas para ayudarlos a encontrar las partes de material que requieren atención especial.

Problemas de repaso. Al final de cada capítulo se incluye un grupo de problemas de repaso. Estos problemas proporcionan a los estudiantes una oportunidad adicional de aplicar los conceptos más importantes presentados en el capítulo.

Problemas de computadora. Cada capítulo incluye un grupo de problemas diseñados para ser resueltos mediante programas de computadora. Muchos de estos problemas son importantes para el proceso de diseño. En estática, por ejemplo, pueden implicar el análisis de una estructura para diferentes configuraciones y cargas o la determinación de las posiciones de equilibrio de un mecanismo que puede requerir un método iterativo de solución. El desarrollo del algoritmo necesario para resolver un problema de mecánica dado beneficiará a los estudiantes en dos formas diferentes: 1) les ayudará a lograr una mejor comprensión de los principios de la mecánica involucrados; 2) les proporcionará la oportunidad de aplicar sus habilidades con la computadora para encontrar la solución de un problema relevante de ingeniería.

MATERIALES DE APOYO

Esta obra cuenta con interesantes complementos que fortalecen los procesos de enseñanza-aprendizaje, así como la evaluación de éstos, mismos que se otorgan a profesores que adoptan este texto para sus cursos. Para obtener más información y conocer la política de entrega de estos materiales, contacte a su representante McGraw-Hill.

Los autores desean agradecer la colaboración de David Mazurek en esta octava edición de *Mecánica vectorial para ingenieros*, y especialmente por el crucial papel que desempeñó en hacer posible la revisión de los problemas de extensión.

Un agradecimiento especial a los colegas que han verificado cuidadosamente las soluciones y respuestas para todos los problemas de esta edición: Yohannes Ketema de la University of Minnesota; Amy Mazurek del Williams Memorial Institute; David Oglesby de University of Missouri-Rolla; y Daniel W. Yannitell de Louisiana State University.

Es un placer reconocer el trabajo de Dennis Ormond y Michael Haughey, de Fine Line Illustrations of Farmingdale, Nueva York, por las artísticas ilustraciones que contribuyen en gran medida a la efectividad del texto.

Los autores agradecen a las diferentes empresas que proporcionaron fotografías para esta edición. También desean reconocer el esfuerzo determinado y la paciencia de Sabina Dowell, quien seleccionó las fotografías.

Un agradecimiento adicional para los miembros de la organización McGraw-Hill por su apoyo y dedicación en preparar esta nueva edición. En particular se reconocen las contribuciones del editor responsable Michael Hackett, de la editora de desarrollo Katie White, y del gerente de proyecto Kay Brimeyer.

Por último, los autores expresan su gratitud por los numerosos comentarios y sugerencias proporcionados por los usuarios de las ediciones anteriores de *Mecánica vectorial para ingenieros*.

E. Russell Johnston, Jr.
Elliot R. Eisenberg

Agradecemos en especial la valiosa contribución de los siguientes asesores técnicos para la presente edición en español:

Cosme Gómez, *Universidad de las Américas, Puebla*
Cuauhtémoc González Palacios, *Universidad Autónoma del Estado de México, campus Toluca*

Felipe Hidalgo Cavazos, *ITESM, campus Monterrey*
Fidel Alejandro Osorio Jaramillo, *Universidad Autónoma del Estado de México, campus Toluca*

Francisco Javier Calleros Ávila, *Universidad de Guadalajara*
Guillermo Cerpa, *Universidad de Guadalajara*
Guillermo Francisco Cueto Rodríguez, Ignacio Ramírez Vargas, *Instituto Tecnológico de Pachuca, ITESM, campus Hidalgo y Universidad Autónoma del Estado de Hidalgo*

Javier Lau, *Universidad de Guadalajara*
José de Jesús Villalobos, *Universidad Autónoma de Nuevo León*
José Luis Hernández, *ITESM, campus Monterrey*
José Nicolás Ponciano Guzmán, *Instituto Tecnológico de Morelia e ITESM, campus Morelia*

Oscar Guerrero, *ITESM*
Pedro Ortiz Ojeda, *Universidad Autónoma de Chiapas*
Pedro Ponce, *ITESM, campus Ciudad de México*
Rafael Valencia Castillo, *Universidad Autónoma del Estado de México, campus Toluca*

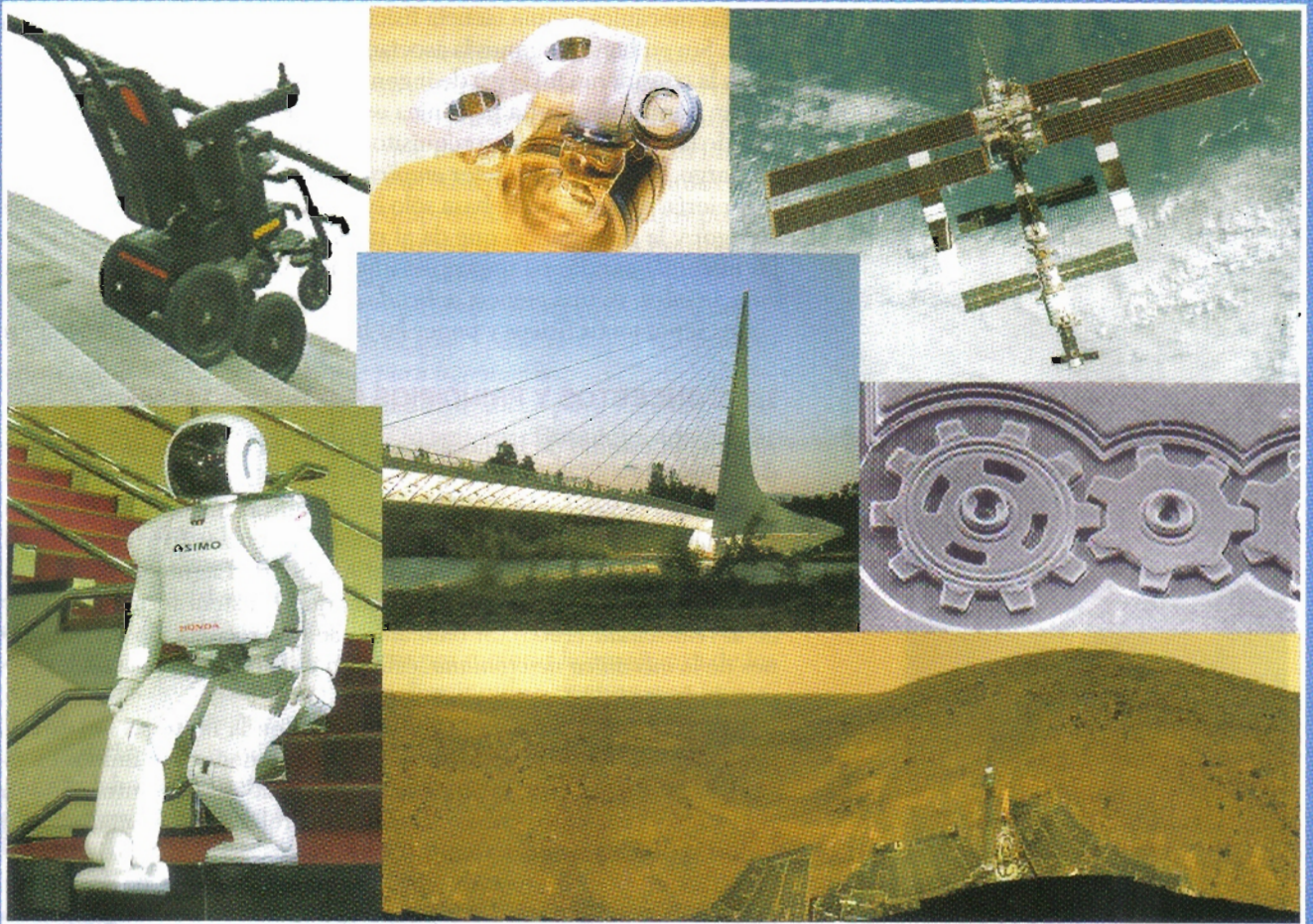
Raúl Crespo, *ITESM, campus Ciudad de México*
Vicente Cepeda Salazar, *ITESM, campus Toluca*
Victor Bustos Peter, *ITESM, campus Toluca*

Lista de símbolos

a	Constante; radio; distancia
A, B, C, \dots	Reacciones en apoyos y uniones
A, B, C, \dots	Puntos
A	Área
b	Ancho; distancia
c	Constante
C	Centroide
d	Distancia
e	Base de logaritmos naturales
F	Fuerza; fuerza de fricción
g	Aceleración de la gravedad
G	Centro de gravedad; constante de gravitación
h	Altura; flecha de un cable
i, j, k	Vectores unitarios a lo largo de los ejes coordenados
I, I_x, \dots	Momentos de inercia
\bar{I}	Momento de inercia centroidal
I_{xy}, \dots	Productos de inercia
J	Momento polar de inercia
k	Constante de un resorte
k_x, k_y, k_O	Radios de giro
\bar{k}	Radio de giro centroidal
l	Longitud
L	Longitud; claro
m	Masa
M	Momento par
M_O	Momento con respecto al punto O
M_O^R	Momento resultante con respecto al punto O
M	Magnitud de un par o de un momento;
	masa de la Tierra
M_{OL}	Momento con respecto al eje OL
N	Componente normal de una reacción
O	Origen de coordenadas
p	Presión
P	Fuerza; vector
Q	Fuerza; vector
r	Vector de posición
r	Radio; distancia; coordenada polar

R	Fuerza resultante; vector resultante; reacción
R	Radio de la Tierra
s	Vector de posición
<i>s</i>	Longitud de arco; longitud de un cable
S	Fuerza; vector
<i>t</i>	Espesor
T	Fuerza
<i>T</i>	Tensión
<i>U</i>	Trabajo
V	Producto vectorial; fuerza constante
<i>V</i>	Volumen; energía potencial; cortante
<i>w</i>	Carga por unidad de longitud
W, W	Peso; carga
<i>x, y, z</i>	Coordenadas rectangulares; distancias
$\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$	Coordenadas rectangulares del centroide o centro de gravedad
α, β, γ	Ángulos
γ	Peso específico
δ	Elongación
$\delta \mathbf{r}$	Desplazamiento virtual
δU	Trabajo virtual
λ	Vector unitario a lo largo de una línea
η	Eficiencia
θ	Coordenada angular; ángulo; coordenada polar
μ	Coefficiente de fricción
ρ	Densidad
ϕ	Ángulo de fricción; ángulo

Introducción



A finales del siglo XVII, Sir Isaac Newton estableció los principios fundamentales de la mecánica, los cuales constituyen la base de gran parte de la ingeniería moderna. El diseño y análisis de casi todos los instrumentos y sistemas requieren del conocimiento de estos principios.

INTRODUCCIÓN

- 1.1 ¿Qué es la mecánica?
- 1.2 Conceptos y principios fundamentales
- 1.3 Sistemas de unidades
- 1.4 Conversión de un sistema de unidades a otro
- 1.5 Método para la solución de problemas
- 1.6 Exactitud numérica

1.1. ¿QUÉ ES LA MECÁNICA?

La mecánica se puede definir como la ciencia que describe y predice las condiciones de reposo o movimiento de los cuerpos bajo la acción de fuerzas. Se divide en tres partes: la mecánica de *cuerpos rígidos*, la mecánica de *cuerpos deformables* y la mecánica de *fluidos*.

La mecánica de cuerpos rígidos se subdivide en *estática* y *dinámica*; la primera estudia los cuerpos en reposo y la segunda los cuerpos en movimiento. En esta parte del estudio de la mecánica se supone que los cuerpos son perfectamente rígidos. Sin embargo, las estructuras y las máquinas reales nunca lo son y se deforman bajo las cargas a las que están sometidas. Estas deformaciones casi siempre son pequeñas y no afectan de manera apreciable las condiciones de equilibrio o de movimiento de la estructura en consideración. Pero son importantes cuando se tiene en cuenta la resistencia de la estructura a las fallas y se estudian en la mecánica de materiales, que es una parte de la mecánica de cuerpos deformables. La tercera parte de la mecánica, la de fluidos, se subdivide en el estudio de los *fluidos incompresibles* y el de los *fluidos compresibles*. La *hidráulica* es una subdivisión importante en el estudio de los fluidos incompresibles y trata problemas relativos a los líquidos.

La mecánica es una ciencia física puesto que estudia fenómenos físicos. Sin embargo, algunos la asocian con las matemáticas, mientras que otros la consideran un tema de ingeniería. Ambos puntos de vista se justifican parcialmente. La mecánica es la base de la mayoría de las ciencias de la ingeniería y es un requisito indispensable para estudiarlas. Sin embargo, no tiene el carácter *empírico* propio de algunas ciencias de la ingeniería, es decir, no se basa sólo en la experiencia u observación; por su rigor y la importancia que da al razonamiento deductivo se parece a las matemáticas. Pero tampoco es una ciencia *abstracta*, ni siquiera una ciencia *pura*; es una ciencia *aplicada*. Su propósito es explicar y predecir los fenómenos físicos y poner las bases para aplicarlas en ingeniería.

1.2. CONCEPTOS Y PRINCIPIOS FUNDAMENTALES

Aunque el estudio de la mecánica se remonta a los tiempos de Aristóteles (384-322 a.C.) y de Arquímedes (287-212 a.C.), se tuvo que esperar hasta Newton (1642-1727) para encontrar una formulación satisfactoria de sus principios fundamentales, los cuales fueron expresados después en forma modificada por d'Alembert, Lagrange y Hamilton. Su validez permaneció incólume hasta que Einstein formuló su *teoría de la relatividad* (1905). Si bien ahora se han reconocido las limitaciones de la *mecánica newtoniana*, ésta aún es la base de las actuales ciencias de la ingeniería.

Los conceptos básicos que se emplean en la mecánica son *espacio*, *tiempo*, *masa* y *fuerza*. Estos conceptos no pueden ser definidos en forma exacta; deben aceptarse sobre las bases de nuestra intuición y experiencia y emplearse como un marco de referencia mental en el estudio de la mecánica.

El concepto de *espacio* se asocia con la noción de posición de un punto *P*. La posición de éste puede definirse por tres longitudes medidas desde cierto punto de referencia u *origen*, en tres direcciones dadas. Estas longitudes se reconocen como *coordenadas* de *P*.

Para definir un evento, no es suficiente con indicar su posición en el espacio sino que debe darse también el *tiempo* del evento.

El concepto de *masa* tiene la función de caracterizar y comparar los cuerpos con base en ciertos experimentos mecánicos fundamenta-



Fotografía 1.1 Sir Isaac Newton

les. Por ejemplo, dos cuerpos que tengan la misma masa serían atraídos por la Tierra de igual forma; también presentarán la misma resistencia a un cambio en su movimiento traslacional.

Una *fuerza* representa la acción de un cuerpo sobre otro y puede ejercerse por contacto real o a distancia, como en el caso de las fuerzas gravitacionales y magnéticas. Una fuerza se caracteriza por su *punto de aplicación*, *magnitud* y *dirección* y se representa con un *vector* (sección 2.3).

En la mecánica newtoniana, espacio, tiempo y masa son conceptos absolutos e independientes entre sí (esto no es así en la *mecánica relativista*, donde el tiempo de un evento depende de su posición y la masa de un cuerpo varía con su velocidad). Por otra parte, el concepto de fuerza no es independiente de los otros tres. En realidad, uno de los principios fundamentales de la mecánica newtoniana, que se enuncian más adelante, indica que la fuerza resultante que actúa sobre un cuerpo se relaciona con la masa de éste y con la forma en que varía su velocidad en el tiempo.

Se estudiarán las condiciones de reposo o movimiento de partículas y cuerpos rígidos a partir de los cuatro principios básicos que se han expuesto. Por *partícula* se entiende una pequeñísima cantidad de materia que ocupa un punto en el espacio. Un *cuerpo rígido* es la combinación de un gran número de partículas que ocupan posiciones fijas entre sí. El estudio de la mecánica de las partículas es un requisito previo al de los cuerpos rígidos. Además, los resultados obtenidos para una partícula pueden usarse directamente en muchos problemas que tratan de las condiciones de reposo o movimiento de cuerpos reales.

El estudio de la mecánica elemental descansa sobre seis principios fundamentales basados en la evidencia experimental.

La ley del paralelogramo para la adición de fuerzas. Establece que dos fuerzas que actúan sobre una partícula pueden ser sustituidas por una sola fuerza llamada *resultante*, que se obtiene al trazar la diagonal del paralelogramo que tiene los lados iguales a las fuerzas dadas (sección 2.2).

El principio de transmisibilidad. Establece que las condiciones de equilibrio o de movimiento de un cuerpo rígido permanecerán inalteradas si una fuerza que actúa en un punto del cuerpo rígido se sustituye por una fuerza de la misma magnitud y la misma dirección, pero que actúe en un punto diferente, siempre que las dos fuerzas tengan la misma línea de acción (sección 3.3).

Las tres leyes fundamentales de Newton. Fueron formuladas por Sir Isaac Newton a finales del siglo XVII y pueden enunciarse como sigue:

PRIMERA LEY. Si la fuerza resultante que actúa sobre una partícula es cero, la partícula permanecerá en reposo (si originalmente estaba en reposo) o se moverá con velocidad constante en línea recta (si originalmente estaba en movimiento) (sección 2.10).

SEGUNDA LEY. Si la fuerza resultante que actúa sobre una partícula no es cero, la partícula tendrá una aceleración proporcional a la magnitud de la resultante y en la dirección de ésta.

Como se verá en la sección 12.2 esta ley puede expresarse así

$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} \quad (1.1)$$

donde \mathbf{F} , m y \mathbf{a} representan, respectivamente, la fuerza resultante que actúa sobre la partícula, la masa de ésta y la aceleración de la misma, expresadas en un sistema congruente de unidades.

TERCERA LEY. Las fuerzas de acción y reacción de cuerpos en contacto tienen la misma magnitud, la misma línea de acción y sentidos opuestos (sección 6.1).

La ley de gravitación de Newton. Establece que dos partículas de masa M y m se atraen mutuamente con fuerzas iguales y opuestas \mathbf{F} y $-\mathbf{F}$ (figura 1.1), de magnitud F dada por la fórmula

$$F = G \frac{Mm}{r^2} \quad (1.2)$$

donde r = la distancia entre las dos partículas

G = la constante universal llamada *constante de gravitación*

La ley de gravitación de Newton introduce la idea de una acción ejercida a distancia y extiende el alcance de aplicación de la tercera ley: la acción \mathbf{F} y la reacción $-\mathbf{F}$ en la figura 1.1 son iguales y opuestas y tienen la misma línea de acción.

Un caso de gran importancia es el de la atracción que la Tierra ejerce sobre una partícula situada en su superficie. La fuerza \mathbf{F} ejercida por la Tierra sobre la partícula se define como el *peso* \mathbf{W} de la partícula. Tomando M igual a la masa de la Tierra, m igual a la masa de la partícula, y r igual al radio R de la Tierra e introduciendo la constante

$$g = \frac{GM}{R^2} \quad (1.3)$$

la magnitud W del peso de una partícula de masa m puede expresarse como¹

$$W = mg \quad (1.4)$$

El valor de R en la fórmula (1.3) depende de la elevación del punto considerado; también depende de su latitud, puesto que la Tierra no es realmente esférica. Así que el valor de g varía con la posición del punto en cuestión. Mientras el punto permanezca sobre la superficie de la Tierra, en la mayoría de los cálculos de ingeniería es suficientemente preciso suponer que g es igual a 9.81 m/s^2 o 32.2 ft/s^2 .

Los principios que se acaban de enunciar se irán explicando en el curso del estudio de la mecánica conforme sea necesario. El estudio de la estática de partículas se realiza en el capítulo 2 y se basa sólo en la ley del paralelogramo para la adición y en la primera ley de Newton. El principio de transmisibilidad se expone en el capítulo 3, al comenzar el estudio de la estática de cuerpos rígidos, y la tercera ley de Newton se expone en el capítulo 6, cuando se analicen las fuerzas ejercidas entre los diferentes elementos que forman una estructura. En el estudio de la dinámica se introducirán la segunda ley de Newton y la ley de gravitación. Allí se mostrará que la primera ley de Newton es un caso particular de la segunda ley (sección 12.2), y que el principio de transmisibilidad podría derivarse de los otros principios y por lo mis-

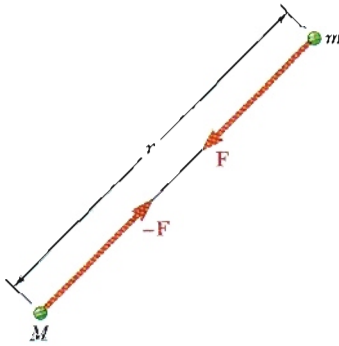
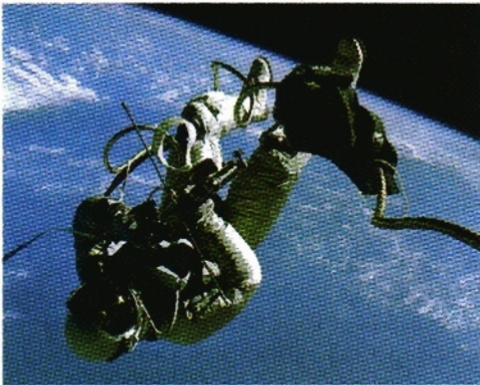


Figura 1.1



Fotografía 1.2 Cuando están en la órbita terrestre, se dice que las personas y los objetos *no tienen peso*, aun cuando la fuerza gravitacional que actúa sobre ellos es aproximadamente 90% de la que se experimenta en la superficie de la Tierra. Esta aparente contradicción se resolverá en el capítulo 12, cuando se aplica la segunda ley de Newton al movimiento de partículas.

¹Una definición más precisa del peso \mathbf{W} debe tomar en cuenta la rotación de la Tierra.

mo quedar eliminado (sección 16.5). Por ahora, las primera y tercera leyes de Newton, la ley del paralelogramo para la adición y el principio de transmisibilidad proporcionarán las bases necesarias y suficientes para el estudio completo de la estática de partículas, de cuerpos rígidos y de sistemas de cuerpos rígidos.

Como se dijo antes, los seis principios fundamentales enunciados antes se basan en la evidencia experimental. A excepción de la primera ley de Newton y el principio de transmisibilidad, todos son principios independientes y no se pueden obtener matemáticamente de los demás ni de cualquier otro principio físico elemental. En ellos descansa la mayor parte de la intrincada estructura de la mecánica newtoniana. La aplicación de estos principios fundamentales ha permitido resolver, por más de dos siglos, un gran número de problemas relacionados con las condiciones de reposo y movimiento de cuerpos rígidos, cuerpos deformables y fluidos. Muchas de las soluciones obtenidas pueden comprobarse mediante experimentos que proporcionan una verificación ulterior de los principios en que se basaron. Fue sólo hasta el siglo pasado que se encontró que la mecánica de Newton tiene deficiencias en el estudio del movimiento de los átomos y en el de ciertos planetas, y que debe complementarse con la teoría de la relatividad. Pero en la escala humana o en la escala de la ingeniería, donde las velocidades son mucho más pequeñas que la velocidad de la luz, la mecánica de Newton aún no ha sido refutada.

1.3. SISTEMAS DE UNIDADES

Con los cuatro conceptos fundamentales introducidos en la sección anterior se asocian las llamadas *unidades cinéticas*, es decir, las unidades de *longitud*, *tiempo*, *masa* y *fuerza*. Estas unidades no pueden escogerse de manera independiente si la ecuación (1.1) ha de satisfacerse. Tres de ellas pueden definirse en forma arbitraria; se les llama *unidades básicas*. La cuarta unidad, en cambio, debe escogerse de acuerdo con la ecuación (1.1) y se le identifica como *unidad derivada*. Se dice que las unidades cinéticas así seleccionadas forman un *sistema congruente de unidades*.

Sistema Internacional de Unidades (Unidades del SI).¹ En este sistema, que será de uso universal cuando Estados Unidos complete su conversión, las unidades básicas son las de longitud, masa y tiempo, y se llaman, respectivamente, *metro* (m), *kilogramo* (kg) y *segundo* (s). Las tres están definidas de manera arbitraria. El segundo, que de manera original se eligió para representar $1/86\,400$ del día solar medio, se define ahora como la duración de $9\,192\,631\,770$ ciclos de la radiación emitida en la transición entre dos niveles del estado fundamental del átomo de cesio-133. El metro, definido en forma original como la diezmillonésima parte de la distancia del ecuador a un polo, se define ahora como $1\,650\,763.73$ longitudes de onda de la luz naranja-roja correspondiente a cierta transición en un átomo de criptón-86. El kilogramo, que es aproximadamente igual a la masa de 0.001 m^3 de agua, se define como la masa de un patrón de platino-iridio que se conserva en la Oficina Internacional de Pesos y Medidas en Sèvres, cerca de París, Francia. La unidad de fuerza es una unidad derivada y se llama *newton* (N). Se le define como la fuerza que proporciona una

¹SI significa *Système International d'Unités* (francés).

aceleración de 1 m/s^2 a una masa de un kilogramo (figura 1.2). A partir de la ecuación (1.1) se escribe

$$1 \text{ N} = (1 \text{ kg})(1 \text{ m/s}^2) = 1 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2 \quad (1.5)$$

Se dice que las unidades del SI forman un sistema *absoluto* de unidades; esto significa que las tres unidades básicas seleccionadas son independientes del lugar en donde se utilicen las medidas. El metro, el kilogramo y el segundo se pueden usar en cualquier lugar de la Tierra; incluso pueden usarse en otro planeta y siempre tendrán el mismo significado.

El *peso* de un cuerpo, o la *fuerza de gravedad* ejercida sobre él, debe expresarse en newtons, como cualquier otra fuerza. De la ecuación (1.4) se obtiene que el peso de un cuerpo de masa 1 kg (figura 1.3) es

$$\begin{aligned} W &= mg \\ &= (1 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2) \\ &= 9.81 \text{ N} \end{aligned}$$

Los múltiplos y submúltiplos de las unidades fundamentales del SI se pueden obtener con el uso de los prefijos que se definen en la tabla 1.1. Los múltiplos y submúltiplos de las unidades de longitud, masa y fuerza de mayor uso en ingeniería son, respectivamente, el *kilómetro* (km) y el *milímetro* (mm); el *megagramo*¹ (Mg) y el *gramo* (g); y el *kilonewton* (kN). De acuerdo con la tabla 1.1, se tiene

$$\begin{aligned} 1 \text{ km} &= 1\,000 \text{ m} & 1 \text{ mm} &= 0.001 \text{ m} \\ 1 \text{ Mg} &= 1\,000 \text{ kg} & 1 \text{ g} &= 0.001 \text{ kg} \\ 1 \text{ kN} &= 1\,000 \text{ N} \end{aligned}$$

La conversión de estas unidades a metros, kilogramos y newtons, respectivamente, puede realizarse con sólo recorrer el punto decimal tres lugares a la derecha o a la izquierda. Por ejemplo, para convertir 3.82 km en metros, se recorre el punto decimal tres lugares a la derecha:

$$3.82 \text{ km} = 3\,820 \text{ m}$$

En forma semejante, 47.2 mm se convierten en metros recorriendo el punto decimal tres lugares a la izquierda:

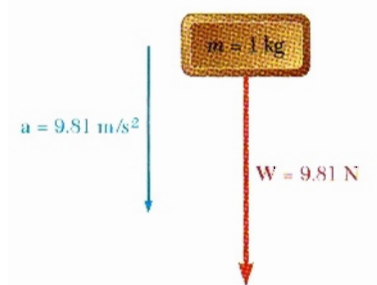
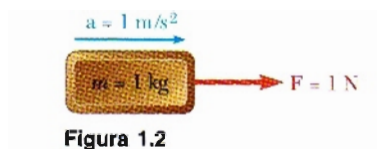
$$47.2 \text{ mm} = 0.0472 \text{ m}$$

Con el uso de la notación científica, se puede escribir

$$\begin{aligned} 3.82 \text{ km} &= 3.82 \times 10^3 \text{ m} \\ 47.2 \text{ mm} &= 47.2 \times 10^{-3} \text{ m} \end{aligned}$$

Los múltiplos de la unidad de tiempo son el *minuto* (min) y la *hora* (h). Puesto que $1 \text{ min} = 60 \text{ s}$ y $1 \text{ h} = 60 \text{ min} = 3\,600 \text{ s}$, estos múltiplos no pueden convertirse tan fácilmente como los otros.

¹También conocida como *tonelada métrica*.



Factor multiplicativo	Prefijo	Símbolo
1 000 000 000 000 = 10^{12}	tera	T
1 000 000 000 = 10^9	giga	G
1 000 000 = 10^6	mega	M
1 000 = 10^3	kilo	k
100 = 10^2	hecto [†]	h
10 = 10^1	deca [†]	da
0.1 = 10^{-1}	deci [†]	d
0.01 = 10^{-2}	centi [†]	c
0.001 = 10^{-3}	mili	m
0.000 001 = 10^{-6}	micro	μ
0.000 000 001 = 10^{-9}	nano	n
0.000 000 000 001 = 10^{-12}	pico	p
0.000 000 000 000 001 = 10^{-15}	femto	f
0.000 000 000 000 000 001 = 10^{-18}	ato	a

[†]Debe evitarse el uso de estos prefijos, excepto en las medidas de áreas y volúmenes y para el uso no técnico del centímetro, como en las medidas referentes a la ropa y al cuerpo.

Con el uso del múltiplo o submúltiplo adecuado de cierta unidad, se puede evitar la escritura de números muy grandes o muy pequeños. Por ejemplo, por lo general se escribe 427.2 km en lugar de 427 200 m, y 2.16 mm en lugar de 0.002 16 m.[†]

Unidades de área y volumen. La unidad de área es el *metro cuadrado* (m^2), que representa el área de un cuadrado de 1 m de lado; la unidad de volumen es el *metro cúbico* (m^3), que es igual al volumen de un cubo de 1 m de lado. Para evitar valores numéricos excesivamente pequeños o demasiado grandes en el cálculo de áreas y volúmenes, se usan sistemas de subunidades que se obtienen elevando, respectivamente, al cuadrado y al cubo no sólo el milímetro sino también dos submúltiplos intermedios del metro, llamados *decímetro* (dm) y *centímetro* (cm). Entonces, por definición,

$$\begin{aligned} 1 \text{ dm} &= 0.1 \text{ m} = 10^{-1} \text{ m} \\ 1 \text{ cm} &= 0.01 \text{ m} = 10^{-2} \text{ m} \\ 1 \text{ mm} &= 0.001 \text{ m} = 10^{-3} \text{ m} \end{aligned}$$

los submúltiplos de la unidad de área son

$$\begin{aligned} 1 \text{ dm}^2 &= (1 \text{ dm})^2 = (10^{-1} \text{ m})^2 = 10^{-2} \text{ m}^2 \\ 1 \text{ cm}^2 &= (1 \text{ cm})^2 = (10^{-2} \text{ m})^2 = 10^{-4} \text{ m}^2 \\ 1 \text{ mm}^2 &= (1 \text{ mm})^2 = (10^{-3} \text{ m})^2 = 10^{-6} \text{ m}^2 \end{aligned}$$

y los submúltiplos de la unidad de volumen son

$$\begin{aligned} 1 \text{ dm}^3 &= (1 \text{ dm})^3 = (10^{-1} \text{ m})^3 = 10^{-3} \text{ m}^3 \\ 1 \text{ cm}^3 &= (1 \text{ cm})^3 = (10^{-2} \text{ m})^3 = 10^{-6} \text{ m}^3 \\ 1 \text{ mm}^3 &= (1 \text{ mm})^3 = (10^{-3} \text{ m})^3 = 10^{-9} \text{ m}^3 \end{aligned}$$

[†]Debe observarse que cuando se usan más de cuatro dígitos a ambos lados del punto decimal para expresar una cantidad en unidades del SI (como en 427 200 m o en 0.002 16 m) deben usarse espacios, no comas, para separar los dígitos en grupos de tres. Esto es con el fin de evitar confusiones con la coma, que se usa en muchos países en lugar del punto decimal.

Debe notarse que cuando se mide el volumen de un líquido, el decímetro cúbico (dm^3) se conoce en forma usual como un *litro* (L).

En la tabla 1.2 se muestran otras unidades derivadas del SI, que se usan para medir el momento de una fuerza, el trabajo de una fuerza, etc. Aunque estas unidades se introducirán en capítulos posteriores conforme se vayan necesitando, es necesario describir una regla importante en esta fase: cuando se obtiene una unidad derivada con la división de una unidad básica entre otra unidad básica, debe usarse un prefijo en el numerador de la unidad derivada pero no en su denominador. Por ejemplo, la constante k de un resorte que se elonga 20 mm bajo una carga de 100 N se expresará como

$$k = \frac{100 \text{ N}}{20 \text{ mm}} = \frac{100 \text{ N}}{0.020 \text{ m}} = 5\,000 \text{ N/m} \quad \text{o} \quad k = 5 \text{ kN/m}$$

pero nunca como $k = 5 \text{ N/mm}$.

Unidades de uso común en Estados Unidos. La mayoría de los ingenieros practicantes estadounidenses todavía utiliza un sistema en el que las unidades básicas son las unidades de longitud, fuerza y tiempo. Estas unidades son, respectivamente, el *pie* (ft), la *libra* (lb) y el *segundo* (s). El segundo es idéntico a la correspondiente unidad del SI. El pie se define como 0.3048 m. La libra se define como el *peso* de un patrón de platino, llamado *libra estándar*, que está en el National Institute

Tabla 1.2. Principales unidades del SI usadas en mecánica

Cantidad	Unidad	Símbolo	Fórmula
Aceleración	Metro por segundo al cuadrado	...	m/s^2
Ángulo	Radián	rad	¹
Aceleración angular	Radián por segundo al cuadrado	...	rad/s^2
Velocidad angular	Radián por segundo	...	rad/s
Área	Metro cuadrado	...	m^2
Densidad	Kilogramo por metro cúbico	...	kg/m^3
Energía	Joule	J	$\text{N} \cdot \text{m}$
Fuerza	Newton	N	$\text{kg} \cdot \text{m/s}^2$
Frecuencia	Hertz	Hz	s^{-1}
Impulso	Newton-segundo	...	$\text{kg} \cdot \text{m/s}$
Longitud	Metro	m	¹
Masa	Kilogramo	kg	¹
Momento de una fuerza	Newton-metro	...	$\text{N} \cdot \text{m}$
Potencia	Watt	W	J/s
Presión	Pascal	Pa	N/m^2
Esfuerzo	Pascal	Pa	N/m^2
Tiempo	Segundo	s	¹
Velocidad	Metro por segundo	...	m/s
Volumen			
Sólidos	Metro cúbico	...	m^3
Líquidos	Litro	L	10^{-3} m^3
Trabajo	Joule	J	$\text{N} \cdot \text{m}$

¹Unidad suplementaria (1 revolución = $2\pi \text{ rad} = 360^\circ$).

¹Unidad básica.

of Standards and Technology en las afueras de Washington, su masa es de 0.453 592 43 kg. Como el peso de un cuerpo depende de la atracción gravitacional de la Tierra, la cual varía con la ubicación, se especifica que la libra estándar debe estar localizada al nivel del mar y a una latitud de 45° para definir en forma apropiada una fuerza de una libra. Es claro que las unidades de uso común en Estados Unidos no forman un sistema de unidades absoluto. Por su dependencia de la atracción gravitacional de la Tierra constituyen un sistema de unidades *gravitacional*.

Aun cuando la libra estándar se emplea también como unidad de masa en transacciones comerciales en Estados Unidos, no puede usarse así en cálculos de ingeniería, debido a que no sería consistente con las unidades básicas definidas en el apartado anterior. De hecho, cuando una fuerza de 1 lb actúa sobre la libra estándar, es decir, cuando está sujeta a la gravedad, recibe la aceleración de la gravedad, $g = 32.2 \text{ ft/s}^2$ (figura 1.4), ésta no es la unidad de aceleración que se requiere según la ecuación (1.1). La unidad de masa consistente con el pie, la libra y el segundo es la masa que recibe una aceleración de 1 ft/s^2 al aplicársele una fuerza de 1 lb (figura 1.5). Esta unidad, algunas veces llamada *slug*, puede derivarse de la ecuación $F = ma$ después de sustituir 1 lb y 1 ft/s^2 para F y a , respectivamente. Se escribe

$$F = ma \quad 1 \text{ lb} = (1 \text{ slug})(1 \text{ ft/s}^2)$$

y se obtiene

$$1 \text{ slug} = \frac{1 \text{ lb}}{1 \text{ ft/s}^2} = 1 \text{ lb} \cdot \text{s}^2/\text{ft} \quad (1.6)$$

Comparando las figuras 1.4 y 1.5 se concluye que el *slug* es una masa 32.2 veces mayor que la masa de la libra estándar.

El hecho de que en el sistema de uso común en Estados Unidos, los cuerpos se caractericen por su peso en libras en lugar de por su masa en *slugs*, será ventajoso en el estudio de la estática, en donde se tratará en forma continua con pesos u otras fuerzas, y sólo en ocasiones con masas. Sin embargo, en el estudio de la dinámica, donde intervienen fuerzas, masas y aceleraciones, la masa m de un cuerpo se expresará en *slugs* cuando su peso W esté dado en libras. Recordando la ecuación (1.4) se escribe

$$m = \frac{W}{g} \quad (1.7)$$

donde g es la aceleración de la gravedad ($g = 32.2 \text{ ft/s}^2$).

Otras unidades de uso común en Estados Unidos que se presentan en forma frecuente en problemas de ingeniería son la *milla* (mi), igual a 5 280 ft; la *pulgada* (in.), igual a $\frac{1}{12}$ ft; y la *kilolibra* (kip), igual a una fuerza de 1 000 lb. La *tonelada* se usa con frecuencia para representar una masa de 2 000 lb pero, al igual que la libra, debe convertirse a *slugs* en los cálculos de ingeniería.

La conversión en pies, libras y segundos de cantidades expresadas en otras unidades de uso común en Estados Unidos, en forma general es más complicada y requiere mayor atención que la operación correspondiente en las unidades del SI. Por ejemplo, si se da la magnitud de

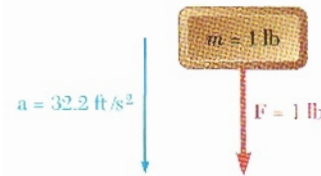


Figura 1.4

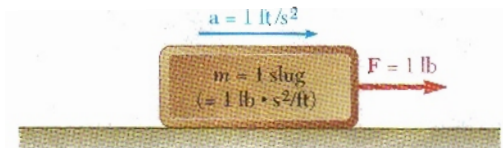


Figura 1.5



Fotografía 1.3 La unidad de masa es la única unidad básica que aún se define con un patrón físico. En la actualidad se trabaja para reemplazar este patrón por uno basado en un fenómeno natural inalterable.

una velocidad como $v = 30 \text{ mi/h}$, se convierte en ft/s de la siguiente manera. Primero se escribe

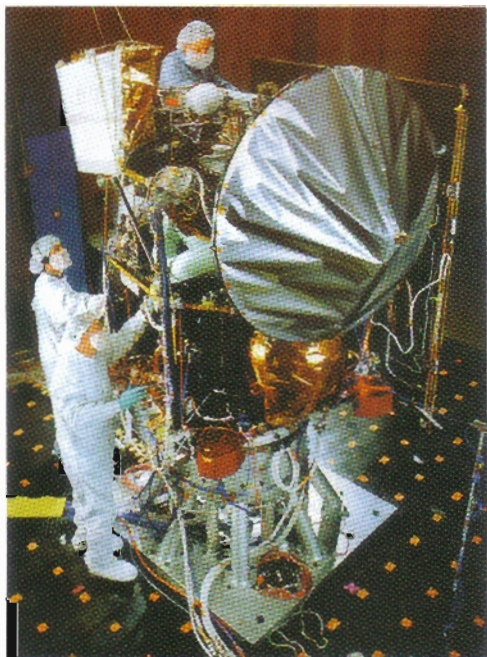
$$v = 30 \frac{\text{mi}}{\text{h}}$$

Puesto que se quieren convertir millas en pies, se debe multiplicar el miembro derecho de la ecuación por una expresión que contenga millas en el denominador y pies en el numerador. Pero, como no se quiere cambiar el valor del miembro derecho, la expresión implicada debe tener un valor igual a uno; el cociente $(5\,280 \text{ ft})/(1 \text{ mi})$ es una expresión de este tipo. Haciendo una operación semejante para transformar la unidad hora en segundos, se escribe

$$v = \left(30 \frac{\text{mi}}{\text{h}}\right) \left(\frac{5\,280 \text{ ft}}{1 \text{ mi}}\right) \left(\frac{1 \text{ h}}{3\,600 \text{ s}}\right)$$

Realizando los cálculos numéricos y cancelando las unidades que aparecen tanto en el numerador como en el denominador, se obtiene

$$v = 44 \frac{\text{ft}}{\text{s}} = 44 \text{ ft/s}$$



Fotografía 1.4 No se puede exagerar la importancia de incluir unidades en todos los cálculos. Se encontró que el satélite climatológico para Marte, con un costo de 125 millones de dólares, falló al ingresar a la órbita alrededor de Marte porque el principal contratista había proporcionado el equipo de navegación con datos operativos basados en unidades de uso común en Estados Unidos, en lugar de las especificaciones del SI

1.4. CONVERSIÓN DE UN SISTEMA DE UNIDADES A OTRO

Existen muchas situaciones en las que un ingeniero necesita convertir en unidades del SI un resultado numérico obtenido en unidades de uso común en Estados Unidos o viceversa. Como la unidad de tiempo es la misma en ambos sistemas, sólo se necesita convertir dos unidades cinéticas básicas y, puesto que todas las otras unidades cinéticas pueden derivarse de estas unidades básicas, sólo se requiere recordar dos factores de conversión.

Unidades de longitud. Por definición, la unidad de longitud de uso común en Estados Unidos es

$$1 \text{ ft} = 0.3048 \text{ m} \quad (1.8)$$

De aquí se tiene que

$$1 \text{ mi} = 5\,280 \text{ ft} = 5\,280(0.3048 \text{ m}) = 1\,609 \text{ m}$$

o bien

$$1 \text{ mi} = 1.609 \text{ km} \quad (1.9)$$

También

$$1 \text{ in.} = \frac{1}{12} \text{ ft} = \frac{1}{12}(0.3048 \text{ m}) = 0.0254 \text{ m}$$

o bien

$$1 \text{ in.} = 25.4 \text{ mm} \quad (1.10)$$

Unidades de fuerza. Recordando que la unidad de fuerza de uso común en Estados Unidos (la libra) se define como el peso de una libra estándar (de masa 0.4536 kg) al nivel del mar y a una latitud de 45° (donde $g = 9.807 \text{ m/s}^2$) y usando la ecuación (1.4), se escribe

$$W = mg$$

$$1 \text{ lb} = (0.4536 \text{ kg})(9.807 \text{ m/s}^2) = 4.448 \text{ kg} \cdot \text{m/s}^2$$

o, recordando la ecuación (1.5),

$$1 \text{ lb} = 4.448 \text{ N} \quad (1.11)$$

Unidades de masa. La unidad de masa de uso común en Estados Unidos (el *slug*) es una unidad derivada. Así, con el uso de las ecuaciones (1.6), (1.8) y (1.11), se puede escribir

$$1 \text{ slug} = 1 \text{ lb} \cdot \text{s}^2/\text{ft} = \frac{1 \text{ lb}}{1 \text{ ft/s}^2} = \frac{4.448 \text{ N}}{0.3048 \text{ m/s}^2} = 14.59 \text{ N} \cdot \text{s}^2/\text{m}$$

y por medio de la ecuación (1.5),

$$1 \text{ slug} = 1 \text{ lb} \cdot \text{s}^2/\text{ft} = 14.59 \text{ kg} \quad (1.12)$$

Aunque no puede usarse como unidad consistente de masa, recordando que la masa de la libra estándar es, por definición,

$$1 \text{ libra masa} = 0.4536 \text{ kg} \quad (1.13)$$

Esta constante se puede usar para determinar la *masa* en unidades del SI (kilogramos) de un cuerpo que esté caracterizado por su *peso* en unidades de uso común en Estados Unidos (libras).

Para convertir una unidad derivada de uso común en Estados Unidos en unidades del SI, simplemente se multiplica o se divide por los factores de conversión apropiados. Por ejemplo, para convertir el momento de una fuerza que ha sido encontrada como $M = 47 \text{ lb} \cdot \text{in.}$ en unidades del SI, se usan las fórmulas (1.10) y (1.11) y se escribe

$$\begin{aligned} M = 47 \text{ lb} \cdot \text{in.} &= 47(4.448 \text{ N})(25.4 \text{ mm}) \\ &= 5\,310 \text{ N} \cdot \text{mm} = 5.31 \text{ N} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

Los factores de conversión dados en esta sección se pueden usar también para convertir un resultado numérico obtenido en las unidades del SI a unidades de uso común en Estados Unidos. Por ejemplo, si el momento de una fuerza se encontró como $M = 40 \text{ N} \cdot \text{m}$, con el procedimiento usado en el último párrafo de la sección 1.3, se escribe

$$M = 40 \text{ N} \cdot \text{m} = (40 \text{ N} \cdot \text{m}) \left(\frac{1 \text{ lb}}{4.448 \text{ N}} \right) \left(\frac{1 \text{ ft}}{0.3048 \text{ m}} \right)$$

Al realizar los cálculos numéricos y cancelar las unidades que aparecen tanto en el numerador como en el denominador, se obtiene

$$M = 29.5 \text{ lb} \cdot \text{ft}$$

Las unidades de uso común en Estados Unidos que se emplean con mayor frecuencia en la mecánica, y sus equivalentes en las unidades del SI, se enlistan en la tabla 1.3.

1.5. MÉTODO PARA LA SOLUCIÓN DE PROBLEMAS

Un problema en mecánica debe abordarse de la misma manera en que se plantearía un problema real de ingeniería. Si se toma como base la experiencia y la intuición propias, será más fácil entender y formular el problema. Sin embargo, una vez que el problema se ha establecido en forma clara, no hay sitio para suposiciones particulares. La solución se debe basar en los seis principios fundamentales establecidos en la sección 1.2 o

Tabla 1.3. Unidades de uso común en Estados Unidos y sus equivalencias en unidades del SI

Cantidad	Unidad de uso común en EU	Equivalente del SI
Aceleración	ft/s^2	0.3048 m/s^2
	in./s^2	0.0254 m/s^2
Área	ft^2	0.0929 m^2
	in.^2	645.2 mm^2
Energía	$\text{ft} \cdot \text{lb}$	1.356 J
Fuerza	kip	4.448 kN
	lb	4.448 N
	oz	0.2780 N
Impulso	$\text{lb} \cdot \text{s}$	$4.448 \text{ N} \cdot \text{s}$
Longitud	ft	0.3048 m
	m.	25.40 mm
	mi	1.609 km
Masa	oz masa	28.35 g
	lb masa	0.4536 kg
	slug	14.59 kg
	ton	907.2 kg
Momento de una fuerza	$\text{lb} \cdot \text{ft}$	$1.356 \text{ N} \cdot \text{m}$
	$\text{lb} \cdot \text{in.}$	$0.1130 \text{ N} \cdot \text{m}$
Momento de inercia de un área	in.^4	$0.4162 \times 10^6 \text{ mm}^4$
	$\text{lb} \cdot \text{ft} \cdot \text{s}^2$	$1.356 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$
Cantidad de movimiento	$\text{lb} \cdot \text{s}$	$4.448 \text{ kg} \cdot \text{m/s}$
Potencia	$\text{ft} \cdot \text{lb/s}$	1.356 W
	hp	745.7 W
Presión o esfuerzo	lb/ft^2	47.88 Pa
	lb/in.^2 (psi)	6.895 kPa
Velocidad	ft/s	0.3048 m/s
	in./s	0.0254 m/s
	mi/h (mph)	0.4470 m/s
	mi/h (mph)	1.609 km/h
Volumen	ft^3	0.02832 m^3
	in.^3	16.39 cm^3
Líquidos	gal	3.785 L
	qt	0.9464 L
Trabajo	$\text{ft} \cdot \text{lb}$	1.356 J

en los teoremas derivados de éstos. Cada paso debe estar justificado con estas bases. Deben seguirse reglas estrictas que conduzcan a la solución de una manera casi automática, sin dejar lugar para la intuición o “sentimientos” particulares. Después de obtener una respuesta, ésta debe verificarse. Aquí, de nuevo, se puede utilizar el sentido común y la experiencia personal. Si el resultado obtenido no es completamente satisfactorio, debe verificarse en forma cuidadosa la formulación del problema, la validez del método utilizado para su solución y la exactitud de los cálculos.

El *planteamiento* de un problema debe ser claro y preciso y contener los datos proporcionados, así como indicar la información que se requiere. Debe incluirse un dibujo claro que muestre todas las cantidades involucradas, así como un diagrama para cada uno de los cuerpos que participan, que indique en forma clara las fuerzas que actúan sobre ellos. A estos diagramas se les conoce como *diagramas de cuerpo libre* y se describirán en detalle en las secciones 2.11 y 4.2.

Los *principios fundamentales* de la mecánica que se enlistan en la sección 1.2 se emplean para escribir ecuaciones que expresen las con-

diciones de reposo o movimiento de los cuerpos considerados. Cada ecuación debe estar relacionada en forma clara con uno de los diagramas de cuerpo libre. Después se procederá a resolver el problema, observando en forma estricta las reglas usuales de álgebra y con el registro minucioso de los diferentes pasos dados.

Después de haber obtenido la respuesta, ésta debe *comprobarse con todo cuidado*. Con frecuencia se pueden detectar errores en el *razonamiento* mediante la verificación de las unidades. Por ejemplo, para determinar el momento de una fuerza de 50 N sobre un punto a 0.60 m de su línea de acción, se escribiría (sección 3.12)

$$M = Fd = (50 \text{ N})(0.60 \text{ m}) = 30 \text{ N} \cdot \text{m}$$

La unidad N · m que se obtiene al multiplicar newtons por metros es la unidad correcta para el momento de una fuerza; si se hubiera obtenido alguna otra unidad, se sabría que se cometió un error.

Los errores de *cálculo* por lo general se encontrarán al sustituir los valores numéricos en una ecuación que no haya sido usada y verificar si la ecuación es correcta. No es posible exagerar la importancia de los cálculos correctos en ingeniería.

1.6. EXACTITUD NUMÉRICA

La exactitud en la solución de un problema depende de dos factores: 1) la exactitud de los datos proporcionados y 2) la de los cálculos desarrollados.

La solución no puede ser más exacta que el menos exacto de estos dos factores; por ejemplo, si se sabe que la carga de un puente es de 75 000 lb con un posible error de 100 lb, el error relativo que mide el grado de precisión del dato es

$$\frac{100 \text{ lb}}{75\,000 \text{ lb}} = 0.0013 = 0.13 \text{ por ciento}$$

Entonces, al calcular la reacción en uno de los soportes del puente no tendría sentido anotarla como 14 322 lb. La exactitud de la solución no puede ser mayor de 0.13 por ciento, sin importar con qué exactitud se realicen los cálculos, y el error posible en la respuesta puede ser tan grande como $(0.13/100)(14\,322 \text{ lb}) \approx 20 \text{ lb}$. La respuesta debería escribirse como $14\,320 \pm 20 \text{ lb}$.

En los problemas de ingeniería los datos rara vez se conocen con una exactitud mayor a 0.2 por ciento, por lo que casi nunca se justifica escribir las respuestas a dichos problemas con una exactitud mayor a 0.2 por ciento. Un criterio práctico es utilizar 4 cifras para registrar números que inicien con un “1” y 3 cifras en todos los otros casos. A menos que se indique otra cosa, los datos proporcionados en un problema deben asumirse como conocidos con un grado de exactitud comparable. Por ejemplo, una fuerza de 40 lb se debería leer 40.0 lb, y una fuerza de 15 lb se debería leer 15.00 lb.

Los ingenieros y estudiantes de ingeniería comúnmente usan las calculadoras electrónicas de bolsillo. La exactitud y velocidad de éstas facilita los cálculos numéricos en la solución de muchos problemas. Sin embargo, los estudiantes no deben registrar más cifras significativas de las que se pueden justificar, sólo porque éstas se pueden obtener fácilmente. Como se mencionó con anterioridad, una exactitud mayor que 0.2 por ciento rara vez es necesaria o significativa en la solución de problemas prácticos de ingeniería.

Estática de partículas



Muchos problemas de ingeniería pueden resolverse tomando en cuenta el *equilibrio* de una *partícula*. En este capítulo se aprenderá que, si el bolardo se considera como una partícula, será posible determinar la relación entre las tensiones de las cuerdas.

ESTÁTICA DE PARTÍCULAS

2.1 Introducción

Fuerzas en un plano

2.2 Fuerza sobre una partícula.

Resultante de dos fuerzas

2.3 Vectores

2.4 Adición o suma de vectores

2.5 Resultante de varias fuerzas concurrentes

2.6 Descomposición de una fuerza en sus componentes

2.7 Componentes rectangulares de una fuerza. Vectores unitarios

2.8 Adición de fuerzas sumando sus componentes x y y

2.9 Equilibrio de una partícula

2.10 Primera ley del movimiento de Newton

2.11 Problemas relacionados con el equilibrio de una partícula.

Diagramas de cuerpo libre

Fuerzas en el espacio

2.12 Componentes rectangulares de una fuerza en el espacio

2.13 Fuerza definida en términos de su magnitud y dos puntos sobre su línea de acción

2.14 Adición de fuerzas concurrentes en el espacio

2.15 Equilibrio de una partícula en el espacio

2.1. INTRODUCCIÓN

En este capítulo se estudiará el efecto de las fuerzas que actúan sobre las partículas. Primero se aprenderá a sustituir dos o más fuerzas que actúan sobre una partícula por una sola fuerza que tenga el mismo efecto que ellas. Esta fuerza equivalente sola es la *resultante* de las fuerzas varias que actúan sobre la partícula. Después se derivarán las relaciones que existen entre las distintas fuerzas que actúan sobre una partícula en un estado de *equilibrio* y se usarán para determinar algunas de las fuerzas que actúan sobre dicha partícula.

El uso de la palabra *partícula* no significa que este capítulo se limite al estudio de pequeños corpúsculos. Quiere decir que el tamaño y la forma de los cuerpos en consideración no afectará en la solución de los problemas tratados en este capítulo, y que todas las fuerzas ejercidas sobre un cuerpo dado se supondrán aplicadas en un mismo punto. Puesto que tal suposición se verifica en muchas aplicaciones prácticas, se podrán resolver un buen número de problemas de ingeniería.

La primera parte de este capítulo está dedicada al estudio de las fuerzas obtenidas en un mismo plano y la segunda al análisis de las fuerzas en el espacio tridimensional.

FUERZAS EN UN PLANO

2.2. FUERZA SOBRE UNA PARTÍCULA. RESULTANTE DE DOS FUERZAS

Una fuerza representa la acción de un cuerpo sobre otro y se caracteriza por su *punto de aplicación*, *magnitud o módulo* y *dirección*. Pero las fuerzas sobre una partícula tienen el mismo punto de aplicación. Por tanto, cada fuerza considerada en este capítulo estará completamente definida por su magnitud o módulo y dirección.

La magnitud o módulo de una fuerza se caracteriza por cierto número de unidades. Como se indicó en el capítulo 1, las unidades del SI usadas por los ingenieros para medir la magnitud de una fuerza son el newton (N) y su múltiplo el kilonewton (kN), igual a 1 000 N, mientras que las unidades del sistema de uso común en Estados Unidos, empleadas con el mismo fin, son la libra (lb) y su múltiplo la kilolibra (kip), igual a 1 000 lb. La dirección de una fuerza se define por la *línea de acción* y el *sentido* de la fuerza. La línea de acción es la línea recta infinita a lo largo de la cual actúa la fuerza; se caracteriza por el ángulo que forma con algún eje fijo (figura 2.1).

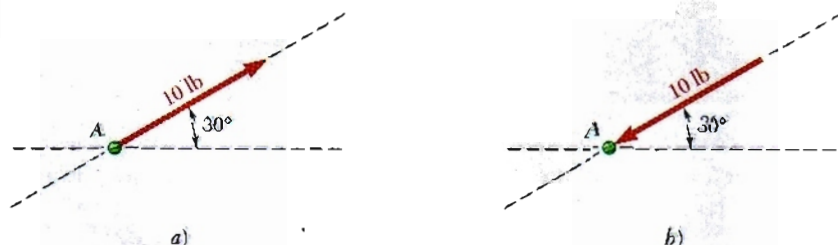


Figura 2.1

La fuerza en sí se representa por un segmento de esa línea; mediante el uso de una escala apropiada, puede escogerse la longitud de este segmento para representar la magnitud de la fuerza. Finalmente, el sentido de la fuerza debe indicarse por una punta de flecha. En la definición de una fuerza es importante indicar su sentido. Dos fuerzas como las mostradas en las figuras 2.1a y b, que tienen la misma magnitud y la misma línea de acción pero diferente sentido, tendrán efectos opuestos sobre una partícula.

La evidencia experimental muestra que dos fuerzas \mathbf{P} y \mathbf{Q} que actúan sobre una partícula A (figura 2.2a) pueden sustituirse por una sola fuerza \mathbf{R} que produce el mismo efecto sobre la partícula (figura 2.2c). A esta fuerza se le llama *resultante* de las fuerzas \mathbf{P} y \mathbf{Q} y puede obtenerse, como se muestra en la figura 2.2b, construyendo un paralelogramo con \mathbf{P} y \mathbf{Q} como lados. La diagonal que pasa por A representa la resultante. Esto se conoce como la *ley del paralelogramo* para la adición de dos fuerzas, y se basa en la evidencia experimental; no puede probarse ni derivarse de manera matemática.

2.3. VECTORES

En apariencia las fuerzas no obedecen las reglas de la adición definidas en la aritmética o en el álgebra ordinaria. Por ejemplo, dos fuerzas que actúan formando un ángulo recto, una de 4 lb y otra de 3 lb, suman una fuerza de 5 lb y no una de 7 lb. Las fuerzas no son las únicas cantidades que siguen la ley del paralelogramo para la adición. Como se verá más adelante, los *desplazamientos*, *velocidades*, *aceleraciones* y *momentos* son otros ejemplos de cantidades físicas que poseen magnitud y dirección y que se suman siguiendo la ley del paralelogramo. Estas cantidades pueden representarse matemáticamente por *vectores*, mientras que aquellas cantidades físicas que no tienen dirección, como *volumen*, *masa* o *energía* se representan por números ordinarios o *escalares*.

Los vectores se definen como *expresiones matemáticas que poseen magnitud, dirección y sentido, los cuales se suman de acuerdo con la ley del paralelogramo*. Los vectores se representan por flechas en las ilustraciones y se distinguen de las cantidades escalares en este texto mediante el uso de negritas (\mathbf{P}). En la escritura a mano, un vector puede caracterizarse dibujando una pequeña flecha arriba de la letra usada para representarlo (\vec{P}) o subrayando la letra (\underline{P}). La magnitud de un vector determina la longitud de la flecha correspondiente. En este libro se usarán letras cursivas para representar la magnitud de un vector. Así, la magnitud del vector \mathbf{P} se representa como P .

Un vector con el que se representa una fuerza que actúa sobre una partícula tiene un punto de aplicación bien definido, a saber, la partícula misma. A tal vector se le llama *vector fijo* o *ligado*, y no puede cambiarse su posición sin modificar las condiciones del problema. Sin embargo, otras cantidades físicas, como los pares (véase capítulo 3), se pueden representar por vectores que pueden moverse libremente en el espacio; a estos vectores se les conoce como *libres*. Existen otras cantidades físicas, como las fuerzas sobre un cuerpo rígido (véase capítulo 3), que están representadas por vectores que pueden moverse o res-

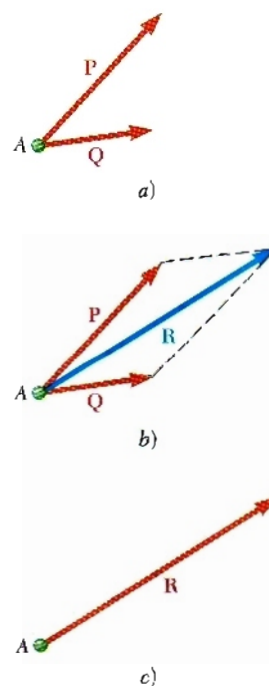


Figura 2.2

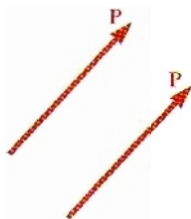


Figura 2.4



Figura 2.5

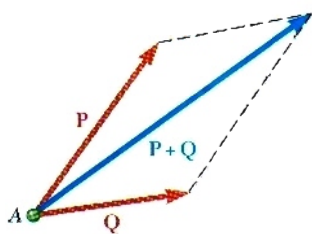


Figura 2.6

balaz a lo largo de su línea de acción; a éstos se les conoce como vectores *deslizantes*.¹

Dos vectores de la misma magnitud, dirección y sentido se dice que son *iguales*, tengan o no el mismo punto de aplicación (figura 2.4); los vectores iguales pueden representarse por la misma letra.

El *vector negativo* de un vector **P** se define como aquel que tiene la misma magnitud que **P** y una dirección opuesta a la de **P** (figura 2.5); el negativo del vector **P** se representa por $-\mathbf{P}$. A los vectores **P** y $-\mathbf{P}$ se les llama vectores *iguales y opuestos*. Se tiene

$$\mathbf{P} + (-\mathbf{P}) = 0$$

2.4. ADICIÓN O SUMA DE VECTORES

En la sección anterior se vio que, por definición, los vectores se suman de acuerdo con la ley del paralelogramo. Así, la suma de dos vectores **P** y **Q** se obtiene uniendo los dos vectores al mismo punto **A** y construyendo un paralelogramo que tenga por lados a **P** y a **Q** (figura 2.6). La diagonal que pasa por **A** representa la suma vectorial de **P** y **Q**, y se representa por $\mathbf{P} + \mathbf{Q}$. El hecho de que el signo + se use para representar tanto la suma vectorial como la escalar no debe causar ninguna confusión, si las cantidades vectoriales y escalares siempre se distinguen con cuidado. De esta manera, se debe notar que la magnitud del vector $\mathbf{P} + \mathbf{Q}$ no es, en general, igual a la suma $P + Q$ de las magnitudes de los vectores **P** y **Q**.

Puesto que el paralelogramo construido con los vectores **P** y **Q** no depende del orden en que **P** y **Q** se seleccionen, se concluye que la adición de dos vectores es *conmutativa*, y se escribe

$$\mathbf{P} + \mathbf{Q} = \mathbf{Q} + \mathbf{P} \quad (2.1)$$

A partir de la ley del paralelogramo se puede obtener otro método para determinar la suma de dos vectores. Este método llamado

¹Algunas expresiones tienen magnitud y dirección pero no se suman de acuerdo con la ley del paralelogramo. Aunque tales expresiones se pueden representar por medio de flechas, no se pueden considerar vectores.

Un grupo de expresiones de este tipo son las rotaciones finitas de un cuerpo rígido. Coloque un libro cerrado enfrente de usted sobre una mesa de manera que se encuentre en la forma habitual, con la portada hacia arriba y el lomo hacia la izquierda. Ahora rote el libro 180° con respecto a un eje paralelo al lomo (figura 2.3a); esta rotación puede ser representada por una flecha orientada, como se muestra en la figura, cuya longitud es igual a 180 unidades. Tomando el libro tal y como se encuentra en su nueva posición, rótelo

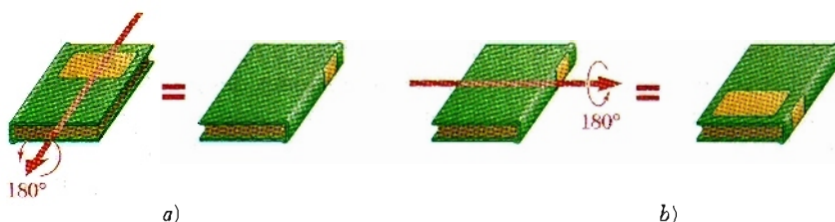


Figura 2.3 Rotaciones finitas de un cuerpo rígido

regla del triángulo se obtiene como sigue: considérese la figura 2.6, donde la suma de los vectores \mathbf{P} y \mathbf{Q} ha sido determinada por la ley del paralelogramo. Puesto que el lado del paralelogramo opuesto a \mathbf{Q} es igual a \mathbf{Q} en magnitud y dirección, se podría dibujar sólo la mitad del paralelogramo (figura 2.7a). De esta manera, la suma de los dos vectores puede encontrarse colocando \mathbf{P} y \mathbf{Q} de punta a cola y uniéndola cola de \mathbf{P} con la punta de \mathbf{Q} . En la figura 2.7b se considera la otra mitad del paralelogramo y se obtiene el mismo resultado. Esto confirma el hecho de que la suma vectorial es conmutativa.

La resta de un vector se define como la adición del vector negativo correspondiente. De manera que el vector $\mathbf{P} - \mathbf{Q}$ que representa la diferencia de los vectores \mathbf{P} y \mathbf{Q} se obtiene agregándole a \mathbf{P} el vector negativo $-\mathbf{Q}$ (figura 2.8). Se escribe

$$\mathbf{P} - \mathbf{Q} = \mathbf{P} + (-\mathbf{Q}) \quad (2.2)$$

Aquí se debe observar otra vez que aunque se usa el mismo signo para representar tanto la sustracción vectorial como la escalar, se evitarán confusiones si se tiene cuidado en distinguir entre cantidades vectoriales y escalares.

Ahora se considerará la suma de tres o más vectores. La suma de tres vectores \mathbf{P} , \mathbf{Q} y \mathbf{S} se obtendrá por definición, sumando primero los vectores \mathbf{P} y \mathbf{Q} y agregando el vector \mathbf{S} al vector $\mathbf{P} + \mathbf{Q}$. De manera que

$$\mathbf{P} + \mathbf{Q} + \mathbf{S} = (\mathbf{P} + \mathbf{Q}) + \mathbf{S} \quad (2.3)$$

En forma semejante, la suma de cuatro vectores se obtiene agregando el cuarto vector a la suma de los tres primeros. Por consiguiente, la suma de cualquier número de vectores se puede obtener al aplicar en forma repetida la ley del paralelogramo a pares sucesivos de vectores, hasta que todos los vectores sean sustituidos por uno solo.

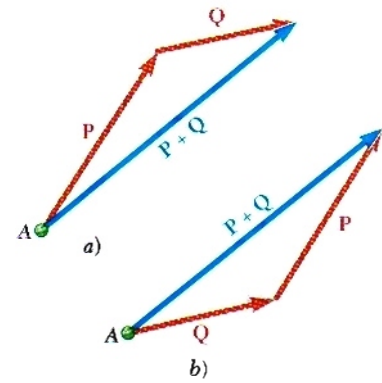


Figura 2.7

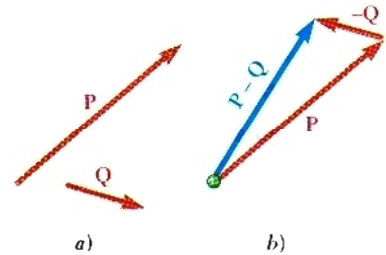
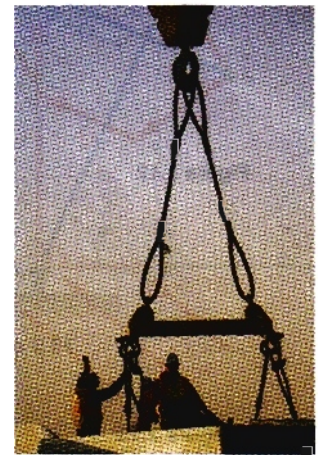
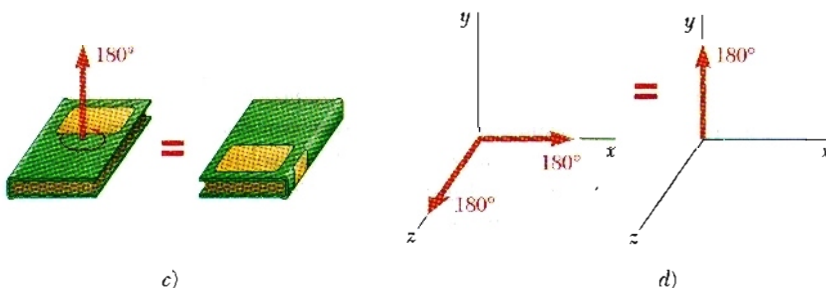


Figura 2.8

ahora 180° alrededor de un eje horizontal perpendicular al lomo (figura 2.3b); esta segunda rotación puede ser representada por medio de una flecha cuya longitud es igual a 180 unidades, orientada como se muestra en la figura. Sin embargo, el libro podría haberse colocado en esta posición final aplicando una sola rotación de 180° con respecto a un eje vertical (figura 2.3c). Se concluye que la suma de las dos rotaciones de 180° representadas por flechas rígidas, respectivamente, a lo largo de los ejes z y x , es una rotación de 180° representada por una flecha dirigida a lo largo del eje y (figura 2.3d). Es obvio que las rotaciones finitas de un cuerpo rígido no obedecen la ley del paralelogramo para la adición; por tanto, éstas no pueden ser representadas por medio de vectores.



Fotografía 2.1 Como se ha mostrado, puede usarse la ley del paralelogramo o bien la regla del triángulo para determinar la fuerza resultante ejercida por los dos cables largos que cuelgan del gancho.

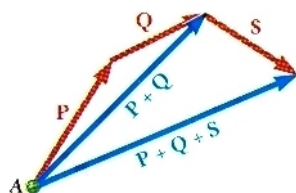


Figura 2.9

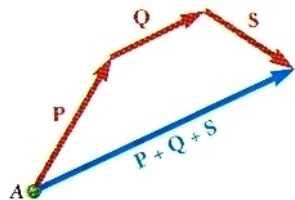


Figura 2.10

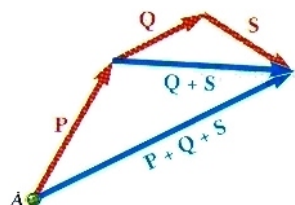


Figura 2.11

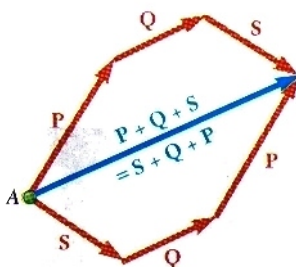


Figura 2.12

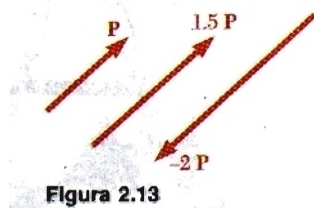


Figura 2.13

Si los vectores dados son *coplanares*, es decir, si están contenidos en el mismo plano, su suma puede obtenerse fácilmente en forma gráfica. En ese caso, se prefiere la aplicación repetida de la regla del triángulo en vez de la ley del paralelogramo. En la figura 2.9 la suma de los tres vectores \mathbf{P} , \mathbf{Q} y \mathbf{S} se obtuvo de esta forma: la regla del triángulo se aplicó primero para obtener la suma $\mathbf{P} + \mathbf{Q}$ de los vectores \mathbf{P} y \mathbf{Q} ; y volvió a aplicarse para obtener la suma de los vectores $\mathbf{P} + \mathbf{Q}$ y \mathbf{S} . Sin embargo, la determinación del vector $\mathbf{P} + \mathbf{Q}$ pudo haberse omitido; obteniéndose directamente la suma de los tres vectores, como se muestra en la figura 2.10, acomodando los vectores en la forma de cola a punta y conectando la cola del primer vector con la punta del último. Ésta se conoce como la *regla del polígono* para la adición de vectores.

Se observa que el resultado obtenido permanecerá sin cambio si, como se muestra en la figura 2.11, los vectores \mathbf{Q} y \mathbf{S} se hubieran reemplazado por la suma de $\mathbf{Q} + \mathbf{S}$. Entonces se puede escribir

$$\mathbf{P} + \mathbf{Q} + \mathbf{S} = (\mathbf{P} + \mathbf{Q}) + \mathbf{S} = \mathbf{P} + (\mathbf{Q} + \mathbf{S}) \quad (2.4)$$

esta ecuación expresa el hecho de que la adición de vectores es *asociativa*. Es importante recordar que ya se demostró que la suma vectorial de dos vectores es también conmutativa, por lo que se escribe

$$\begin{aligned} \mathbf{P} + \mathbf{Q} + \mathbf{S} &= (\mathbf{P} + \mathbf{Q}) + \mathbf{S} = \mathbf{S} + (\mathbf{P} + \mathbf{Q}) \\ &= \mathbf{S} + (\mathbf{Q} + \mathbf{P}) = \mathbf{S} + \mathbf{Q} + \mathbf{P} \end{aligned} \quad (2.5)$$

Esta expresión, junto con otras que pudieran obtenerse en la misma forma, muestra que el orden en que se sumen varios vectores no importa (figura 2.12).

Producto de un escalar y un vector. Como es conveniente representar la suma $\mathbf{P} + \mathbf{P}$ como $2\mathbf{P}$, a la suma $\mathbf{P} + \mathbf{P} + \mathbf{P}$ como $3\mathbf{P}$, y en general a la suma de n vectores \mathbf{P} iguales como el producto $n\mathbf{P}$, se definirá el producto $n\mathbf{P}$ de un entero positivo n y un vector \mathbf{P} , como un vector que tiene la misma dirección que \mathbf{P} y magnitud nP (léase n veces P). Al ampliar esta definición para incluir a todos los escalares y si recordamos la definición de un vector negativo dada en la sección 2.3, se define el producto $k\mathbf{P}$ de un escalar k y un vector \mathbf{P} como un vector que tiene la misma dirección y sentido que \mathbf{P} (si k es positivo), o la misma dirección pero sentido opuesto al de \mathbf{P} (si k es negativo) y una magnitud igual al producto de P y el valor absoluto de k (figura 2.13).

2.5. RESULTANTE DE VARIAS FUERZAS CONCURRENTES

Considérese una partícula A sujeta a varias fuerzas coplanares, es decir, a varias fuerzas contenidas en el mismo plano (figura 2.14a). Como todas estas fuerzas pasan por A , se dice que son *concurrentes*. Los vectores que representan las fuerzas que actúan sobre A pueden sumarse con la regla del polígono (figura 2.14b). Puesto que el uso de la regla del polígono es equivalente a la aplicación repetida de la ley del paralelogramo, el vector \mathbf{R} obtenido representa la resultante de las fuerzas concurrentes que intervienen, es decir, la fuerza que produce el mismo efecto sobre la partícula A que las fuerzas dadas. Como se in-

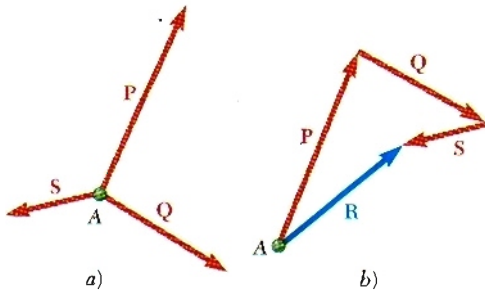


Figura 2.14

díco antes, no importa el orden en el que se sumen los vectores \mathbf{P} , \mathbf{Q} y \mathbf{S} que representan las fuerzas sobre la partícula.

2.6. DESCOMPOSICIÓN DE UNA FUERZA EN SUS COMPONENTES

Se ha visto que dos o más fuerzas que actúan sobre una partícula pueden sustituirse por una sola fuerza que produce el mismo efecto sobre la partícula. De la misma manera, una sola fuerza \mathbf{F} que actúa sobre una partícula puede reemplazarse por dos o más fuerzas que produzcan juntas el mismo efecto sobre la partícula. A estas fuerzas se les llama *componentes* de la fuerza original \mathbf{F} , y al proceso de sustituirlas en lugar de \mathbf{F} se le llama *descomposición de la fuerza \mathbf{F} en sus componentes*.

En este sentido, para cada fuerza \mathbf{F} existe un número infinito de conjuntos de componentes. Los conjuntos de *dos componentes* \mathbf{P} y \mathbf{Q} son los más importantes en cuanto a aplicaciones prácticas se refiere. Pero aun en este caso, el número de formas en las que una fuerza \mathbf{F} puede descomponerse en sus componentes es ilimitado (figura 2.15). Dos casos son de especial interés:

1. *Una de las dos componentes, \mathbf{P} , se conoce.* La segunda componente, \mathbf{Q} , se obtiene aplicando la regla del triángulo y uniendo la punta de \mathbf{P} a la punta de \mathbf{F} (figura 2.16); la magnitud, la dirección y el sentido de \mathbf{Q} se determinan gráficamente o por trigonometría. Una vez que \mathbf{Q} se ha determinado, ambas componentes \mathbf{P} y \mathbf{Q} deben aplicarse en A .
2. *Se conoce la línea de acción de cada una de las componentes.* La magnitud y el sentido de las componentes se obtiene al aplicar la ley del paralelogramo y trazando líneas, por la punta de \mathbf{F} , paralelas a las líneas de acción dadas (figura 2.17). De esta forma se obtienen dos componentes bien definidas \mathbf{P} y \mathbf{Q} , que pueden determinarse gráficamente o por trigonometría aplicando la ley de los senos.

Pueden encontrarse muchos otros casos; por ejemplo, cuando la dirección de una de las componentes se conoce y se busca que la magnitud de la otra sea lo más pequeña posible (véase problema resuelto 2.2). En todos los casos se traza un triángulo o un paralelogramo adecuado que satisfaga las condiciones.

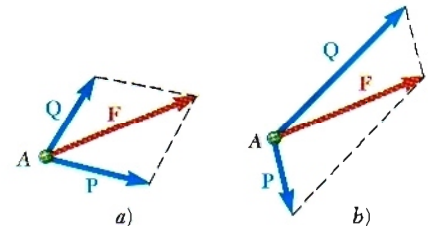


Figura 2.15

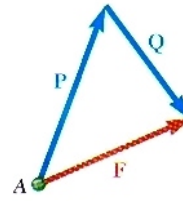


Figura 2.16

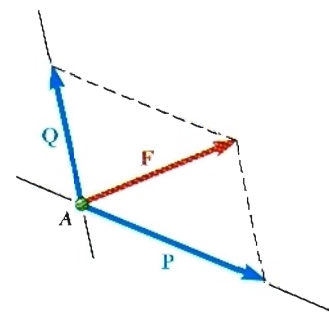
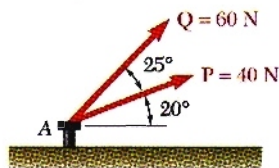


Figura 2.17



PROBLEMA RESUELTO 2.1

Las dos fuerzas **P** y **Q** actúan sobre el perno **A**. Determínese su resultante.

SOLUCIÓN

Solución gráfica. Dibuje a escala un paralelogramo con lados iguales a **P** y **Q**. La magnitud y la dirección de la resultante se miden y se encuentra que son

$$R = 98 \text{ N} \quad \alpha = 35^\circ \quad \mathbf{R = 98 \text{ N } \angle 35^\circ} \quad \blacktriangleleft$$

También puede usarse la regla del triángulo. Las fuerzas **P** y **Q** se dibujan de punta a cola y otra vez se obtienen la magnitud y la dirección de la resultante por medición directa.

$$R = 98 \text{ N} \quad \alpha = 35^\circ \quad \mathbf{R = 98 \text{ N } \angle 35^\circ} \quad \blacktriangleleft$$

Solución trigonométrica. Se usa otra vez la regla del triángulo; los dos lados y el ángulo de la resultante se conocen. Se aplica la ley de los cosenos.

$$\begin{aligned} R^2 &= P^2 + Q^2 - 2PQ \cos B \\ R^2 &= (40 \text{ N})^2 + (60 \text{ N})^2 - 2(40 \text{ N})(60 \text{ N}) \cos 155^\circ \\ R &= 97.73 \text{ N} \end{aligned}$$

Ahora con la aplicación de la ley de los senos, se escribe

$$\frac{\sin A}{Q} = \frac{\sin B}{R} \quad \frac{\sin A}{6 \text{ N}} = \frac{\sin 155^\circ}{97.73 \text{ N}} \quad (1)$$

Al resolver la ecuación (1) para el seno de **A**, se tiene

$$\sin A = \frac{(60 \text{ N}) \sin 155^\circ}{97.73 \text{ N}}$$

Con la calculadora se obtiene primero el cociente, luego su arco seno y el resultado es

$$A = 15.04^\circ \quad \alpha = 20^\circ + A = 35.04^\circ$$

Con el uso de tres cifras significativas para escribir el resultado (véase sección 1.6):

$$\mathbf{R = 97.7 \text{ N } \angle 35.0^\circ} \quad \blacktriangleleft$$

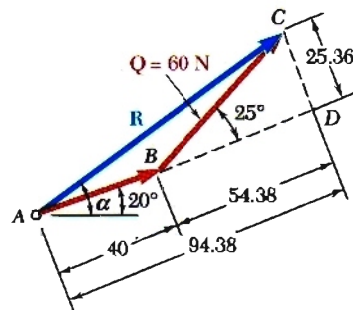
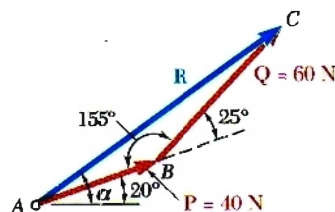
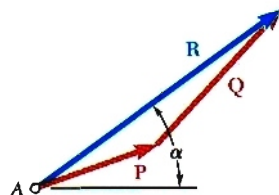
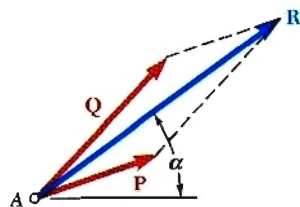
Solución trigonométrica alternativa. Se construye el triángulo rectángulo **BCD** y se calcula

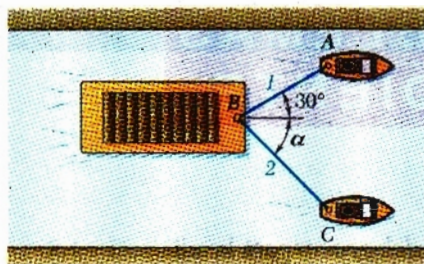
$$\begin{aligned} CD &= (60 \text{ N}) \sin 25^\circ = 25.36 \text{ N} \\ BD &= (60 \text{ N}) \cos 25^\circ = 54.38 \text{ N} \end{aligned}$$

Al usar entonces el triángulo **ACD**, se obtiene

$$\begin{aligned} \tan A &= \frac{25.36 \text{ N}}{94.38 \text{ N}} & A &= 15.04^\circ \\ R &= \frac{25.36}{\sin A} & R &= 97.73 \text{ N} \end{aligned}$$

$$\text{Otra vez,} \quad \alpha = 20^\circ + A = 35.04^\circ \quad \mathbf{R = 97.7 \text{ N } \angle 35.0^\circ} \quad \blacktriangleleft$$





PROBLEMA RESUELTO 2.2

Un lanchón es arrastrado por dos remolcadores. Si la resultante de las fuerzas ejercidas por los remolcadores es una fuerza de 5 000 lb dirigida a lo largo del eje del lanchón, determine: a) la tensión en cada una de las cuerdas, sabiendo que $\alpha = 45^\circ$, y b) el valor de α tal que la tensión en la cuerda 2 sea mínima.

SOLUCIÓN

a) Tensión para $\alpha = 45^\circ$. Solución gráfica. Se emplea la ley del paralelogramo; la diagonal (resultante) se sabe que es igual a 5 000 lb y que está dirigida hacia la derecha; los lados se dibujan paralelos a las cuerdas. Si el dibujo se hace a escala puede medirse

$$T_1 = 3\,700 \text{ lb} \quad T_2 = 2\,600 \text{ lb} \quad \blacktriangleleft$$

Solución trigonométrica. Puede usarse la regla del triángulo. Obsérvese que el triángulo mostrado representa la mitad del paralelogramo que se presenta antes. Si se emplea la ley de los senos, se escribe

$$\frac{T_1}{\sin 45^\circ} = \frac{T_2}{\sin 30^\circ} = \frac{5\,000 \text{ lb}}{\sin 105^\circ}$$

Con la calculadora, primero se calcula y se almacena el valor del último cociente. Al multiplicar este valor sucesivamente por $\sin 45^\circ$ y $\sin 30^\circ$, se obtiene

$$T_1 = 3\,660 \text{ lb} \quad T_2 = 2\,590 \text{ lb} \quad \blacktriangleleft$$

b) Valor de α para T_2 mínima. Para determinar el valor de α tal que la tensión de la cuerda 2 sea mínima se usa otra vez la regla del triángulo. En el esquema mostrado, la línea $I-I'$ es la dirección de T_1 . Las líneas $2-2'$ indican varias direcciones posibles de T_2 . Observe que el mínimo valor de T_2 ocurre cuando T_1 y T_2 son perpendiculares. El valor mínimo de T_2 es

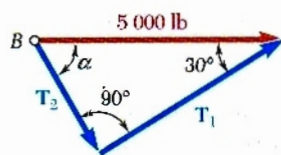
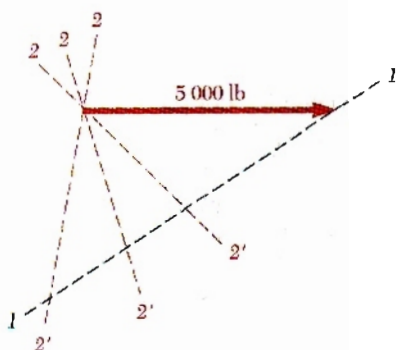
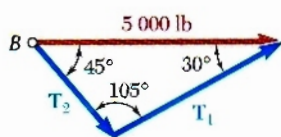
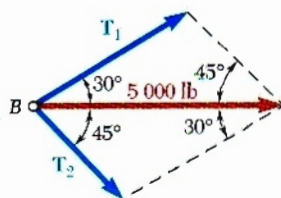
$$T_2 = (5\,000 \text{ lb}) \sin 30^\circ = 2\,500 \text{ lb}$$

Los valores correspondientes de T_1 y α son

$$T_1 = (5\,000 \text{ lb}) \cos 30^\circ = 4\,330 \text{ lb}$$

$$\alpha = 90^\circ - 30^\circ$$

$$\alpha = 60^\circ \quad \blacktriangleleft$$



RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

Las secciones anteriores estuvieron dedicadas a la *ley del paralelogramo* para la adición de vectores.

Ahora se pedirá la resolución de problemas en forma independiente. Mientras que algunos problemas serán similares a los problemas resueltos otros no lo serán. Lo que tienen en común todos los problemas resueltos y los problemas propuestos correspondientes a esta sección es que se pueden resolver con la aplicación directa de la ley del paralelogramo.

La solución de un problema propuesto debe basarse en los siguientes pasos:

1. Identificar cuáles de las fuerzas son aplicadas y cuál es la resultante.

En muchas ocasiones es útil escribir la ecuación vectorial que muestra la forma en que las fuerzas están relacionadas entre sí. Por ejemplo, en el problema resuelto 2.1 se tendría

$$\mathbf{R} = \mathbf{P} + \mathbf{Q}$$

Es deseable tener presente esta relación al momento de formular la siguiente parte de la solución.

2. Dibujar un paralelogramo con las fuerzas aplicadas como dos lados adyacentes y la resultante como la diagonal que parte del origen de los dos vectores (figura 2.2). Se puede usar la *regla del triángulo*, alternativamente, con las fuerzas aplicadas dibujadas con la unión de la parte terminal de uno de los vectores a la parte inicial del otro y dibujando la fuerza resultante extendiéndose desde la parte inicial del primer vector hasta la parte terminal del segundo vector (figura 2.7).

3. Señalar todas las dimensiones. Con el uso de uno de los triángulos del paralelogramo, o el triángulo construido de acuerdo con la regla del triángulo, se deben señalar todas las dimensiones —ya sean lados o ángulos— y determinar las dimensiones desconocidas ya sea en forma gráfica o por trigonometría. Si se usa trigonometría, debe recordarse que la ley de los cosenos se debe aplicar primero si dos lados y el ángulo que éstos forman son conocidos [problema resuelto 2.1], y la ley de los senos debe aplicarse primero si uno de los lados y todos los ángulos son conocidos [problema resuelto 2.2].

Como es claro en las figuras de la sección 2.6, las dos componentes de una fuerza deben ser perpendiculares. Por tanto, cuando se requiera descomponer una fuerza en dos componentes, es esencial alinear los dos lados adyacentes del paralelogramo con las líneas de acción especificadas de las componentes.

Si se tiene un estudio previo de mecánica, se podría estar tentado a ignorar las técnicas de solución de esta sección en favor de descomponer las fuerzas en sus componentes rectangulares. A pesar de que este último método es importante y será considerado en la siguiente sección, el uso de la ley del paralelogramo simplifica la solución de muchos problemas y debe dominarse en estos momentos.

Problemas[†]

2.1 Dos fuerzas **P** y **Q** se aplican en el punto **A** del gancho que se muestra en la figura. Si $P = 15 \text{ lb}$ y $Q = 25 \text{ lb}$, determine en forma gráfica la magnitud y la dirección de su resultante empleando *a)* la ley del paralelogramo, *b)* la regla del triángulo.

2.2 Dos fuerzas **P** y **Q** se aplican en el punto **A** del gancho que se muestra en la figura. Si $P = 45 \text{ lb}$ y $Q = 15 \text{ lb}$, determine gráficamente la magnitud y la dirección de su resultante empleando *a)* la ley del paralelogramo, *b)* la regla del triángulo.

2.3 Dos fuerzas son aplicadas a una armella sujeta a una viga. Determine en forma gráfica la magnitud y la dirección de su resultante usando *a)* la ley del paralelogramo, *b)* la regla del triángulo.

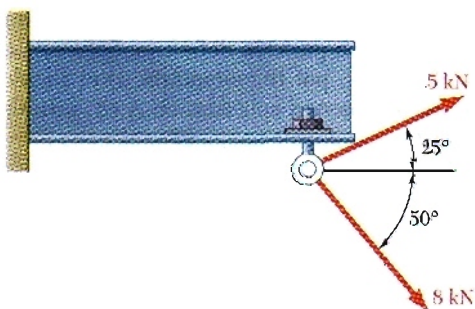


Figura P2.3

2.4 Un automóvil descompuesto es jalado por medio de cuerdas sujetas a las dos fuerzas que se muestran en la figura. Determine en forma gráfica la magnitud y la dirección de su resultante usando *a)* la ley del paralelogramo, *b)* la regla del triángulo.

2.5 La fuerza de 200 N se descompone en componentes a lo largo de las líneas $a-a'$ y $b-b'$. *a)* Determine por trigonometría el ángulo α sabiendo que la componente a lo largo de $a-a'$ es de 150 N. *b)* ¿Cuál es el valor correspondiente de la componente a lo largo de $b-b'$?

2.6 La fuerza de 200 N se descompone en componentes a lo largo de las líneas $a-a'$ y $b-b'$. *a)* Determine por trigonometría el ángulo α sabiendo que la componente a lo largo de $b-b'$ es de 120 N. *b)* ¿Cuál es el valor correspondiente de la componente a lo largo de $a-a'$?

2.7 Se aplican dos fuerzas en el gancho de apoyo que se muestra en la figura. Sabiendo que la magnitud de **P** es de 600 N, determine por trigonometría *a)* el ángulo α requerido si la resultante **R** de las dos fuerzas aplicadas en el gancho es vertical, y *b)* la magnitud correspondiente de **R**.

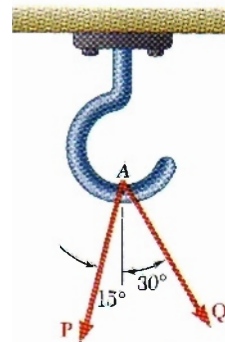


Figura P2.1 y P2.2

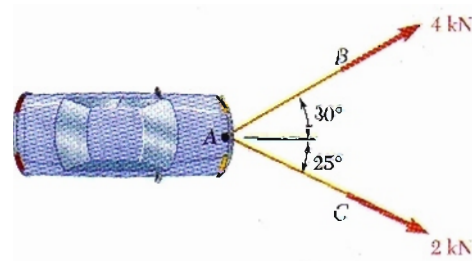


Figura P2.4

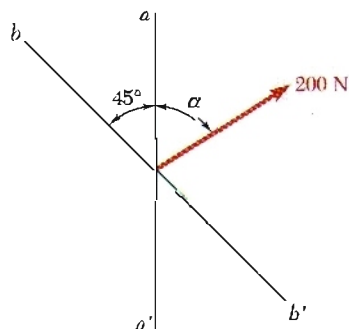


Figura P2.5 y P2.6

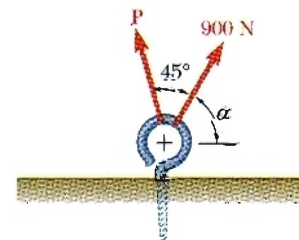


Figura P2.7

[†]Las respuestas para todos los problemas cuyo número está en un tipo de letra recta (como 2.1) se proporcionan al final del libro. Las respuestas para los problemas cuyo número está en letra cursiva (como 2.3) no se proporcionan.

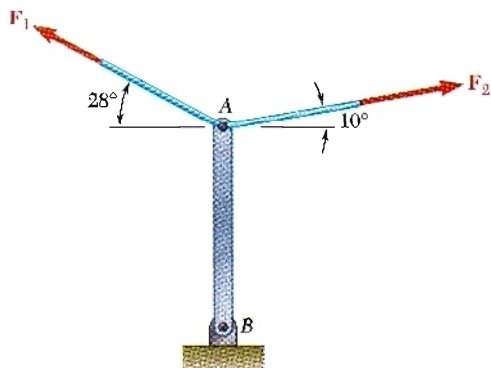


Figura P2.8 y P2.9

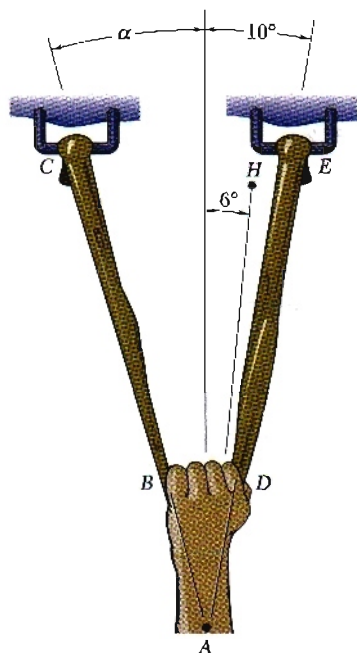


Figura P2.10

2.8 Dos varillas de control están unidas en A a la palanca AB. Aplique trigonometría y, sabiendo que la fuerza en la varilla de la izquierda es $F_1 = 30$ lb, determine *a*) la fuerza F_2 requerida en la varilla derecha si la resultante \mathbf{R} de las fuerzas ejercidas por las varillas sobre la palanca es vertical, *b*) la magnitud correspondiente de \mathbf{R} .

2.9 Dos varillas de control están unidas en A a la palanca AB. Aplique trigonometría y, sabiendo que la fuerza en la varilla de la derecha es $F_2 = 20$ lb, determine *a*) la fuerza F_1 requerida en la varilla izquierda si la resultante \mathbf{R} de las fuerzas ejercidas por las varillas sobre la palanca es vertical, *b*) la magnitud correspondiente de \mathbf{R} .

2.10 Una banda elástica para hacer ejercicio está sujeta y se estira como indica la figura 2.10. Si la tensión en las porciones BC y DE es igual a 80 y 60 N, respectivamente, determine, por trigonometría, *a*) el ángulo α requerido si la resultante \mathbf{R} de las dos fuerzas ejercidas en la mano en el punto A es vertical, *b*) la magnitud correspondiente de \mathbf{R} .

2.11 Dos cables sujetan un anuncio en el punto A para mantenerlo estable mientras es bajado a su posición definitiva. Sabiendo que $\alpha = 25^\circ$, determine, por trigonometría, *a*) la magnitud requerida de la fuerza \mathbf{P} si la resultante \mathbf{R} de las dos fuerzas aplicadas en A es vertical, *b*) la magnitud correspondiente de \mathbf{R} .

2.12 Dos cables sujetan un anuncio en el punto A para mantenerlo estable mientras es bajado a su posición definitiva. Sabiendo que la magnitud de \mathbf{P} es de 70 lb, determine, por trigonometría, *a*) el ángulo α requerido si la resultante \mathbf{R} de las dos fuerzas aplicadas en A es vertical, *b*) la magnitud correspondiente de \mathbf{R} .

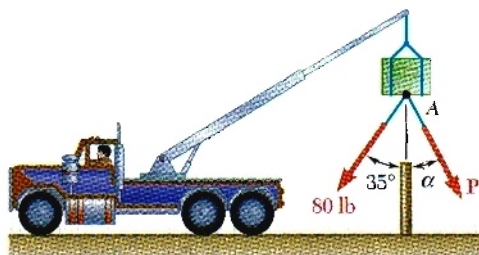


Figura P2.11 y P2.12

2.13 Como indica la figura P2.11, dos cables sujetan un anuncio en el punto A para mantenerlo estable mientras es bajado a su posición definitiva. Determine, por trigonometría, *a*) la magnitud y la dirección de la fuerza mínima \mathbf{P} cuya resultante \mathbf{R} de las dos fuerzas aplicadas en A es vertical, *b*) la magnitud correspondiente de \mathbf{R} .

2.14 Una banda elástica para hacer ejercicio está sujeta y se estira como indica la figura P2.10. Si la tensión en la porción DE de la banda es igual a 70 N, determine, por trigonometría, *a*) la magnitud y la dirección de la fuerza mínima presente en la porción BC para la que la resultante \mathbf{R} de las dos fuerzas ejercidas sobre la mano en el punto A se dirige a lo largo de una línea que une los puntos A y H, *b*) la magnitud correspondiente de \mathbf{R} .

2.15 Resuelva el problema 2.1 empleando trigonometría.

2.16 Resuelva el problema 2.2 empleando trigonometría.

2.17 Resuelva el problema 2.3 empleando trigonometría.

2.18 Para el gancho del problema 2.7 determine, por trigonometría, la magnitud y la dirección de la resultante de las dos fuerzas aplicadas en el gancho, si se sabe que $P = 500 \text{ N}$ y $\alpha = 60^\circ$.

2.19 Dos elementos estructurales A y B están remachados al apoyo que se muestra en la figura. Si ambos elementos están en compresión, y la fuerza presente en el elemento A es de 30 kN y la del elemento B es de 20 kN determine, por trigonometría, la magnitud y la dirección de la resultante de las fuerzas aplicadas al apoyo mediante los elementos A y B.

2.20 Dos elementos estructurales A y B están remachados al apoyo que se muestra en la figura. Si ambos elementos están en compresión y la fuerza presente en el elemento A es de 20 kN y la del elemento B es de 30 kN determine, por trigonometría, la magnitud y la dirección de la resultante de las fuerzas aplicadas al apoyo mediante los elementos A y B.

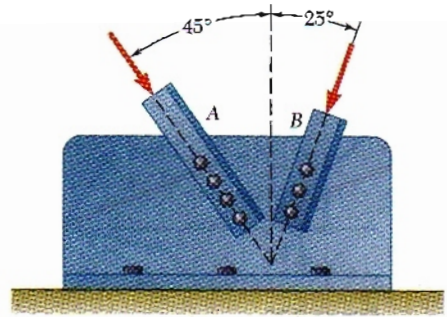


Figura P2.19 y P2.20

2.7. COMPONENTES RECTANGULARES DE UNA FUERZA. VECTORES UNITARIOS†

En muchos problemas será conveniente descomponer una fuerza en sus dos componentes perpendiculares entre sí. En la figura 2.18, la fuerza F se ha descompuesto en una componente F_x a lo largo del eje x y una componente F_y a lo largo del eje y . El paralelogramo trazado para obtener las dos componentes es un *rectángulo*, y las fuerzas F_x y F_y se llaman *componentes rectangulares*.

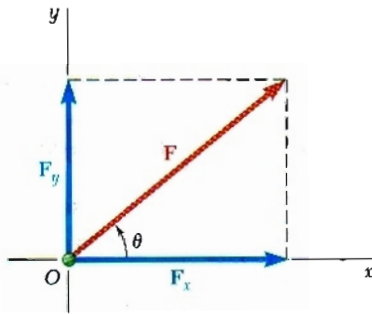


Figura 2.18

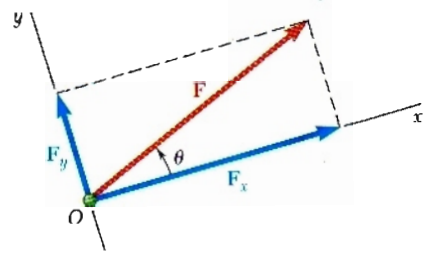


Figura 2.19

Los ejes x y y suelen elegirse a lo largo de las direcciones horizontal y vertical, respectivamente, como se muestra en la figura 2.18; sin embargo, pueden seleccionarse en cualesquiera otras dos direcciones perpendiculares, tal como indica la figura 2.19. Para determinar las componentes rectangulares de una fuerza debe pensarse que las líneas de construcción mostradas en las figuras 2.18 y 2.19 son *paralelas* a los ejes x y y en lugar de *perpendiculares* a ellos. Esta práctica ayudará a evitar errores en la determinación de componentes *oblicuas*, como se vio en la sección 2.6.

† Las propiedades establecidas en las secciones 2.7 y 2.8 se pueden extender fácilmente a las componentes rectangulares de cualquier otra cantidad vectorial.

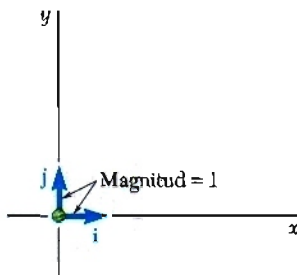


Figura 2.20

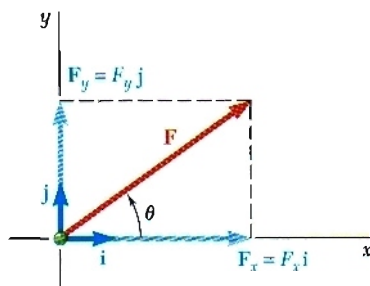


Figura 2.21

y

En este punto se introducirán dos vectores de magnitud unitaria dirigidos a lo largo de los ejes positivos x y y . A estos vectores se les llama *vectores unitarios* y se representan por \mathbf{i} y \mathbf{j} , respectivamente (figura 2.20). Al recordar la definición del producto de un escalar y un vector dada en la sección 2.4, se observa que las componentes rectangulares F_x y F_y de una fuerza \mathbf{F} pueden obtenerse con la multiplicación de sus respectivos vectores unitarios \mathbf{i} y \mathbf{j} por escalares apropiados (figura 2.21). Se escribe

$$\mathbf{F}_x = F_x \mathbf{i} \quad \mathbf{F}_y = F_y \mathbf{j} \quad (2.6)$$

$$\mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} \quad (2.7)$$

Mientras que los escalares F_x y F_y pueden ser positivos o negativos, dependiendo del sentido de \mathbf{F}_x y \mathbf{F}_y , sus valores absolutos son respectivamente iguales a las magnitudes de las componentes de las fuerzas \mathbf{F}_x y \mathbf{F}_y . Los escalares F_x y F_y se llaman *componentes escalares* de la fuerza \mathbf{F} , mientras que las componentes reales de la fuerza \mathbf{F}_x y \mathbf{F}_y son las *componentes vectoriales* de \mathbf{F} . Sin embargo, cuando no existe alguna posibilidad de confusión, a los vectores y a las componentes escalares de \mathbf{F} puede llamárseles simplemente *componentes* de \mathbf{F} . Se observa que la componente escalar F_x es positiva cuando la componente vectorial \mathbf{F}_x tiene el mismo sentido que el vector unitario \mathbf{i} (es decir, el mismo sentido que el eje x positivo) y es negativa cuando \mathbf{F}_x tiene el sentido opuesto. Una conclusión semejante puede obtenerse observando el signo de la componente escalar F_y .

Si se representa con F la magnitud de la fuerza \mathbf{F} y con θ el ángulo entre \mathbf{F} y el eje x , medido en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj desde el eje x positivo (figura 2.21), se pueden expresar las componentes escalares de \mathbf{F} como sigue:

$$F_x = F \cos \theta \quad F_y = F \sin \theta \quad (2.8)$$

Se observa que las relaciones obtenidas se satisfacen para cualquier valor del ángulo θ entre 0 y 360° y que éstas definen tanto los signos como los valores absolutos de las componentes escalares F_x y F_y .

Ejemplo 1. Una fuerza de 800 N se ejerce sobre un perno A como se muestra en la figura 2.22a. Determinése las componentes horizontal y vertical de la fuerza.

Para obtener el signo correcto de las componentes escalares F_x y F_y , el valor $180^\circ - 35^\circ = 145^\circ$ debe sustituirse por θ en las ecuaciones (2.8). Sin embargo, es más práctico determinar por inspección los signos de F_x y F_y (figura 2.22b) y usar las funciones trigonométricas del ángulo $\alpha = 35^\circ$. Por consiguiente se puede escribir

$$F_x = -F \cos \alpha = -(800 \text{ N}) \cos 35^\circ = -655 \text{ N}$$

$$F_y = +F \sin \alpha = +(800 \text{ N}) \sin 35^\circ = +459 \text{ N}$$

Las componentes vectoriales de \mathbf{F} son entonces

$$\mathbf{F}_x = -(655 \text{ N})\mathbf{i} \quad \mathbf{F}_y = +(459 \text{ N})\mathbf{j}$$

y \mathbf{F} se puede escribir en la forma

$$\mathbf{F} = -(655 \text{ N})\mathbf{i} + (459 \text{ N})\mathbf{j}$$

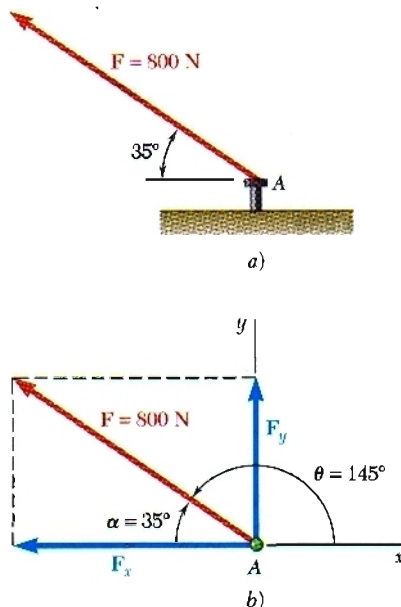


Figura 2.22

Ejemplo 2. Un hombre jala una cuerda atada a un edificio con una fuerza de 300 N, como se muestra en la figura 2.23a. ¿Cuáles son las componentes horizontal y vertical de la fuerza ejercida por la cuerda en el punto A?

A partir de la figura 2.23b se ve que

$$F_x = +(300 \text{ N}) \cos \alpha \quad F_y = -(300 \text{ N}) \sin \alpha$$

Observando que $AB = 10 \text{ m}$, a partir de la figura 2.23a se encuentra que

$$\cos \alpha = \frac{8 \text{ m}}{AB} = \frac{8 \text{ m}}{10 \text{ m}} = \frac{4}{5} \quad \sin \alpha = \frac{6 \text{ m}}{AB} = \frac{6 \text{ m}}{10 \text{ m}} = \frac{3}{5}$$

Entonces se obtiene

$$F_x = +(300 \text{ N}) \frac{4}{5} = +240 \text{ N} \quad F_y = -(300 \text{ N}) \frac{3}{5} = -180 \text{ N}$$

y se escribe

$$\mathbf{F} = (240 \text{ N})\mathbf{i} - (180 \text{ N})\mathbf{j}$$

Si una fuerza \mathbf{F} se define por sus componentes rectangulares F_x y F_y (véase figura 2.21), el ángulo θ que define su dirección puede obtenerse escribiendo

$$\tan \theta = \frac{F_y}{F_x} \quad (2.9)$$

La magnitud F de la fuerza se obtiene con el teorema de Pitágoras y escribiendo

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \quad (2.10)$$

o bien resolviendo para F una de las fórmulas de las ecuaciones (2.8).

Ejemplo 3. Una fuerza $\mathbf{F} = (700 \text{ lb})\mathbf{i} + (1\,500 \text{ lb})\mathbf{j}$ se aplica a un perno A. Determinése la magnitud de la fuerza y el ángulo θ que forma con la horizontal.

Primero se dibuja un diagrama que muestra las dos componentes rectangulares de la fuerza y el ángulo θ (figura 2.24). A partir de la ecuación (2.9), se escribe

$$\tan \theta = \frac{F_y}{F_x} = \frac{1\,500 \text{ lb}}{700 \text{ lb}}$$

Con la calculadora,[†] se hace la división de 1 500 lb entre 700 lb; se calcula el arco tangente de este cociente y se obtiene $\theta = 65.0^\circ$. Al resolver la segunda de las ecuaciones (2.8) para F , se tiene

$$F = \frac{F_y}{\sin \theta} = \frac{1\,500 \text{ lb}}{\sin 65.0^\circ} = 1\,655 \text{ lb}$$

El último cálculo se facilita si el valor de F_y se almacena en la memoria desde que se introduce, de manera que pueda ser llamado para dividirse entre $\sin \theta$.

[†] Se supone que la calculadora que se está utilizando tiene teclas para el cálculo de funciones trigonométricas y de funciones trigonométricas inversas. Algunas calculadoras también tienen teclas para convertir directamente de coordenadas rectangulares a coordenadas polares y viceversa. Este tipo de calculadoras eliminan la necesidad de calcular funciones trigonométricas en los ejemplos 1, 2 y 3 y en problemas del mismo tipo.

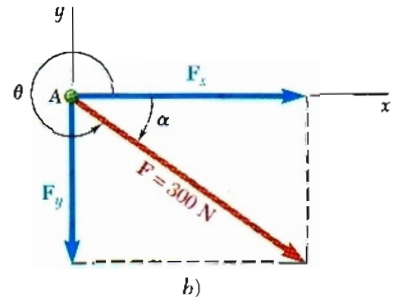
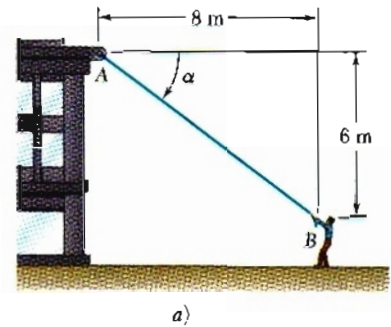


Figura 2.23

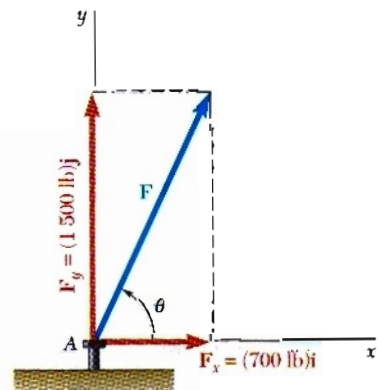


Figura 2.24

2.8. ADICIÓN DE FUERZAS SUMANDO SUS COMPONENTES X Y Y

En la sección 2.2 se estudió que las fuerzas deben sumarse de acuerdo con la ley del paralelogramo. A partir de esta ley se derivaron en las secciones 2.4 y 2.5 otros dos métodos más directos aplicables a la solución gráfica de los problemas: la regla del triángulo para la suma de dos fuerzas y la regla del polígono para la adición de tres o más fuerzas. También se vio que el triángulo de fuerzas usado para definir la resultante de dos fuerzas podría usarse para obtener una solución *trigonométrica*.

Cuando se van a sumar tres o más fuerzas, no puede obtenerse una solución trigonométrica práctica del polígono de fuerzas que define a la fuerza resultante. En este caso puede obtenerse una solución *analítica* del problema si se descompone cada fuerza en sus elementos rectangulares. Considere, por ejemplo, las tres fuerzas **P**, **Q** y **S** que actúan sobre una partícula A (figura 2.25a). Su resultante **R** está definida por la relación

$$\mathbf{R} = \mathbf{P} + \mathbf{Q} + \mathbf{S} \quad (2.11)$$

Si se descompone cada fuerza en sus componentes rectangulares, se escribe

$$\begin{aligned} R_x \mathbf{i} + R_y \mathbf{j} &= P_x \mathbf{i} + P_y \mathbf{j} + Q_x \mathbf{i} + Q_y \mathbf{j} + S_x \mathbf{i} + S_y \mathbf{j} \\ &= (P_x + Q_x + S_x) \mathbf{i} + (P_y + Q_y + S_y) \mathbf{j} \end{aligned}$$

de donde se tiene que

$$R_x = P_x + Q_x + S_x \quad R_y = P_y + Q_y + S_y \quad (2.12)$$

o, en forma breve,

$$R_x = \Sigma F_x \quad R_y = \Sigma F_y \quad (2.13)$$

Por tanto, se puede concluir que *las componentes escalares R_x y R_y de la resultante **R** de varias fuerzas que actúan sobre una partícula se obtienen separando de manera algebraica las correspondientes componentes escalares de las fuerzas dadas.*[†]

En la práctica, la determinación de la resultante **R** se realiza en tres etapas, como se ilustra en la figura 2.25. Primero, las fuerzas mostradas en la figura 2.25a se descomponen en sus componentes x y y (figura 2.25b). Con la suma de estas componentes x y y de **R** (figura 2.25c). Finalmente, la resultante $\mathbf{R} = R_x \mathbf{i} + R_y \mathbf{j}$ se determina aplicando la ley del paralelogramo (figura 2.25d). El procedimiento que se acaba de describir se realiza con más eficiencia si los cálculos se tabulan. Aunque éste es el único método analítico práctico para la adición de tres o más fuerzas, con frecuencia también se le prefiere sobre la solución trigonométrica en el caso de la suma de dos fuerzas.

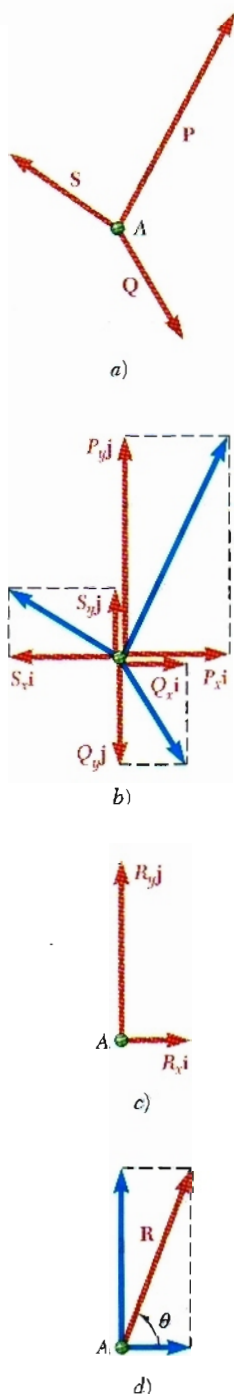
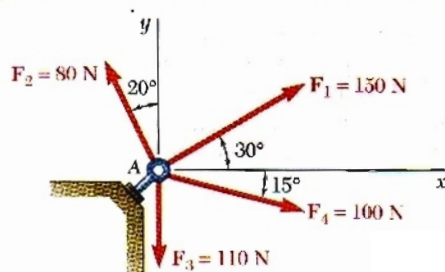


Figura 2.25

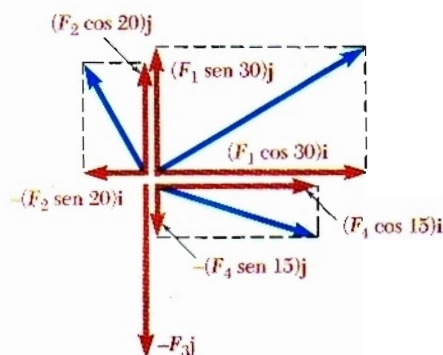
[†]Obviamente, este resultado se puede aplicar también a la adición de otras cantidades vectoriales, aceleraciones o cantidades de movimiento.



PROBLEMA RESUELTO 2.3

Cuatro fuerzas actúan sobre un perno A como se muestra en la figura. Determine la resultante de las fuerzas sobre el perno.

SOLUCIÓN



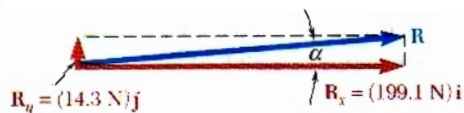
Las componentes x y y de cada fuerza se determinan por trigonometría, como se muestra en la figura y se escriben en la tabla. De acuerdo con la convención adoptada en la sección 2.7, un número escalar que representa la componente de una fuerza es positivo si la componente tiene el mismo sentido que el correspondiente eje de coordenadas. Entonces, las componentes x que actúan a la derecha y las componentes y que actúan hacia arriba se representan por números positivos.

Fuerza	Magnitud, N	Componente x , N	Componente y , N
F_1	150	+129.9	+75.0
F_2	80	-27.4	+75.2
F_3	110	0	-110.0
F_4	100	+96.6	-25.9
		$R_x = +199.1$	$R_y = +14.3$

En estas condiciones la resultante \mathbf{R} de las cuatro fuerzas es

$$\mathbf{R} = R_x \mathbf{i} + R_y \mathbf{j} \quad \mathbf{R} = (199.1 \text{ N})\mathbf{i} + (14.3 \text{ N})\mathbf{j} \quad \blacktriangleleft$$

La magnitud y la dirección de la resultante ya puede determinarse. Del triángulo mostrado en la figura, se tiene



$$\tan \alpha = \frac{R_y}{R_x} = \frac{14.3 \text{ N}}{199.1 \text{ N}} \quad \alpha = 4.1^\circ$$

$$R = \frac{14.3 \text{ N}}{\sin \alpha} = 199.6 \text{ N} \quad \mathbf{R} = 199.6 \text{ N} \angle 4.1^\circ \quad \blacktriangleleft$$

El último cálculo puede facilitarse con el uso de calculadora, si el valor de R_y se almacena en la memoria al introducirse, de manera que pueda ser llamado para dividirse entre $\sin \alpha$. (Véase también la nota al pie de la página 29.)

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

Como se vio en la lección anterior, la resultante de dos fuerzas puede ser determinada gráficamente o a partir de un triángulo oblicuo, con el uso de la trigonometría.

A. Cuando están involucradas tres o más fuerzas, la determinación de su resultante **R** se lleva a cabo de manera más sencilla descomponiendo primero cada una de las fuerzas en sus *componentes rectangulares*. Se pueden encontrar dos casos, que dependen de la forma en que esté definida cada una de las fuerzas dadas:

Caso 1. La fuerza **F** está definida por medio de su magnitud **F** y el ángulo α que forma con el eje de las **x**. Las componentes **x** y **y** de la fuerza se pueden obtener, respectivamente, al multiplicar **F** por $\cos \alpha$ y por $\sin \alpha$ [ejemplo 1].

Caso 2. La fuerza **F** se define por medio de su magnitud **F** y las coordenadas de dos puntos **A** y **B** que se encuentran a lo largo de su línea de acción (figura 2.23). Por medio de la trigonometría, primero se puede determinar el ángulo α que **F** forma con el eje **x**. Sin embargo, las componentes de **F** también se pueden obtener directamente a partir de las proporciones entre las diversas dimensiones involucradas, sin determinar realmente α [ejemplo 2].

B. Componentes rectangulares de la resultante. Las componentes R_x y R_y de la resultante se pueden obtener con la suma algebraica de las componentes correspondientes de las fuerzas dadas [problema resuelto 2.3].

La resultante se puede expresar en *forma vectorial* con los vectores unitarios **i** y **j**, los cuales están dirigidos, respectivamente, a lo largo de los ejes **x** y **y**:

$$\mathbf{R} = R_x \mathbf{i} + R_y \mathbf{j}$$

De manera alternativa, se pueden determinar la *magnitud y la dirección* de la resultante resolviendo para **R** y para el ángulo que **R** forma con el eje **x**, el triángulo rectángulo de lados R_x y R_y .

En los ejemplos y en el problema resuelto de esta lección, los ejes **x** y **y** fueron, respectivamente, horizontal y vertical. Sin embargo, se debe recordar que, para algunos problemas, será más eficiente rotar los ejes para alinearlos con una o más fuerzas aplicadas.

Problemas

2.21 Determine las componentes x y y de cada una de las fuerzas que se muestran en la figura.

2.22 Determine las componentes x y y de cada una de las fuerzas que se muestran en la figura.

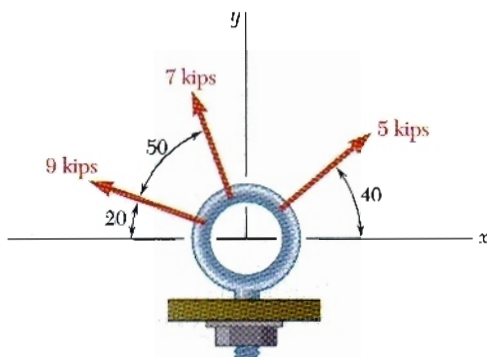


Figura P2.22

2.23 y 2.24 Determine las componentes x y y de cada una de las fuerzas que se muestran en la figura.

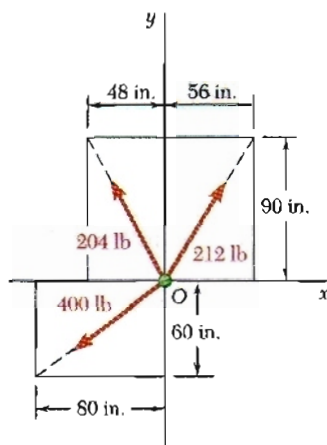


Figura P2.24

2.25 El elemento BD ejerce sobre el miembro ABC una fuerza P dirigida a lo largo de la línea BD . Si P debe tener una componente vertical de 960 N, determine a) la magnitud de la fuerza P , b) su componente horizontal.

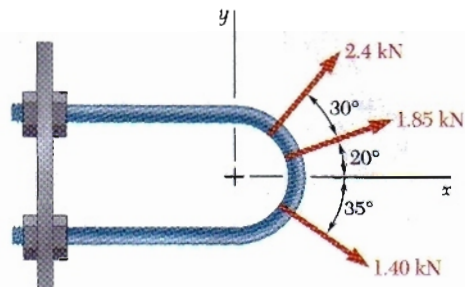


Figura P2.21

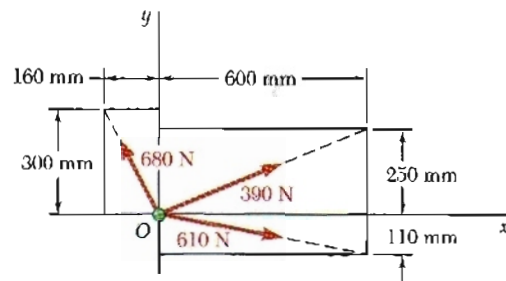


Figura P2.23

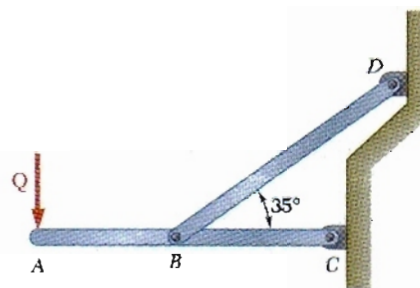


Figura P2.25

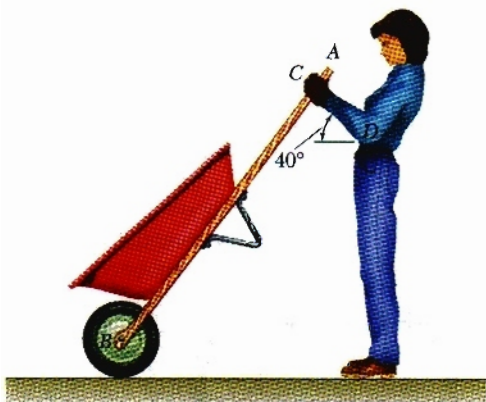


Figura P2.26

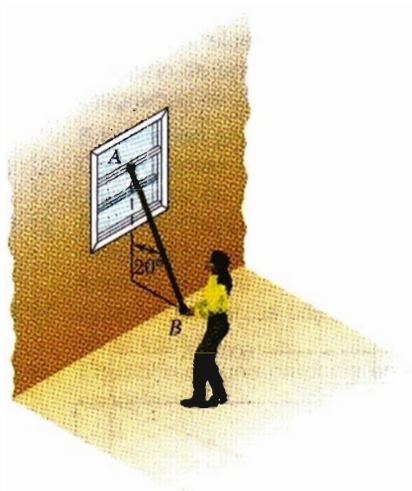


Figura P2.29 y P2.30

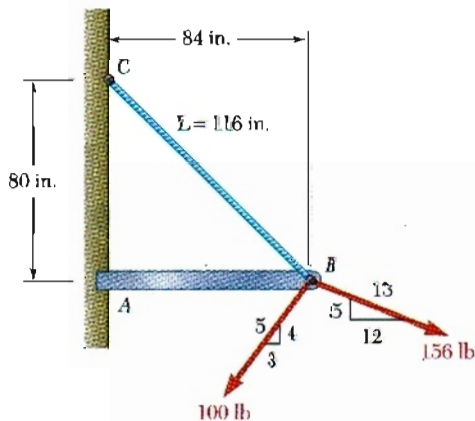


Figura P2.35

2.26 Mientras vacía una carretilla, una jardinera ejerce sobre cada mango AB una fuerza P dirigida a lo largo de la línea CD . Si P debe tener una componente horizontal de 30 lb, determine *a*) la magnitud de la fuerza P , *b*) su componente vertical.

2.27 Sobre el codo BCD , la varilla de activador AB ejerce una fuerza P dirigida a lo largo de la línea AB . Si P debe tener una componente de 100 N perpendicular al brazo BC del codo, determine *a*) la magnitud de la fuerza P , *b*) su componente a lo largo de la línea BC .

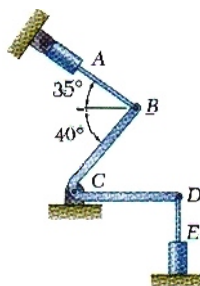


Figura P2.27

2.28 El elemento CB de la prensa de banco mostrada en la figura ejerce, sobre el bloque B , una fuerza P dirigida a lo largo de la línea CB . Si la componente horizontal de P debe tener una magnitud de 260 lb, determine *a*) la magnitud de la fuerza P , *b*) su componente vertical.

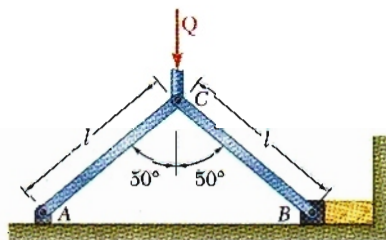


Figura P2.28

2.29 Se utiliza una garrocha para abrir una ventana como se muestra en la figura. Si la garrocha ejerce sobre la ventana una fuerza P dirigida a lo largo de la garrocha, y la magnitud de la componente vertical de P es de 45 N, determine *a*) la magnitud de la fuerza P , *b*) su componente horizontal.

2.30 Se utiliza una garrocha para abrir una ventana como se muestra en la figura. Si la garrocha ejerce sobre la ventana una fuerza P dirigida a lo largo de la garrocha, y la magnitud de la componente horizontal de P es de 18 N, determine *a*) la magnitud de la fuerza P , *b*) su componente vertical.

2.31 Determine la resultante de las tres fuerzas del problema 2.21.

2.32 Determine la resultante de las tres fuerzas del problema 2.22.

2.33 Determine la resultante de las tres fuerzas del problema 2.24.

2.34 Determine la resultante de las tres fuerzas del problema 2.23.

2.35 Si la tensión en el cable BC es de 145 lb, determine la resultante de las tres fuerzas ejercidas en el punto B de la viga AB .

2.36 Un collarín que puede deslizarse sobre una varilla vertical se somete a las tres fuerzas mostradas en la figura. Determine *a*) el valor del ángulo α para el que la resultante de las tres fuerzas es horizontal, *b*) la magnitud correspondiente de la resultante.

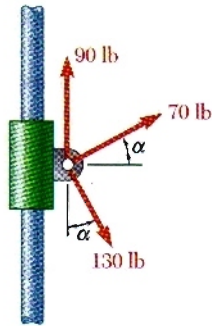


Figura P2.36

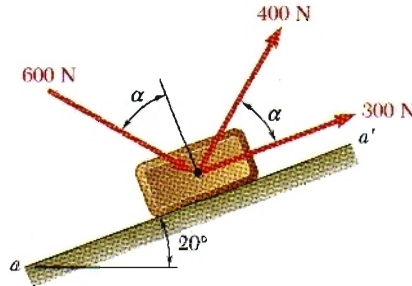


Figura P2.37

2.37 Si $\alpha = 65^\circ$, determine la resultante de las tres fuerzas que se muestran en la figura.

2.38 Si $\alpha = 50^\circ$, determine la resultante de las tres fuerzas que se muestran en la figura.

2.39 Para la viga del problema 2.35, determine *a*) la tensión requerida en el cable *BC* si la resultante de las tres fuerzas ejercidas en el punto *B* debe ser vertical, *b*) la magnitud correspondiente de la resultante.

2.40 Para las tres fuerzas del problema 2.38, determine *a*) el valor requerido de α si la resultante debe ser vertical, *b*) la magnitud correspondiente de la resultante.

2.41 Para el bloque del problema 2.37, determine *a*) el valor requerido de α si la resultante de las tres fuerzas mostradas debe ser paralela al plano inclinado, *b*) la magnitud correspondiente de la resultante.

2.42 El aguilón *AB* se sostiene en la posición mostrada en la figura mediante tres cables. Si las tensiones respectivas en los cables *AC* y *AD* son de 900 y de 1 200 lb, determine *a*) la tensión en el cable *AE* si la resultante de las tensiones ejercidas en el punto *A* del aguilón debe estar dirigida a lo largo de *AB*, *b*) la magnitud correspondiente de la resultante.

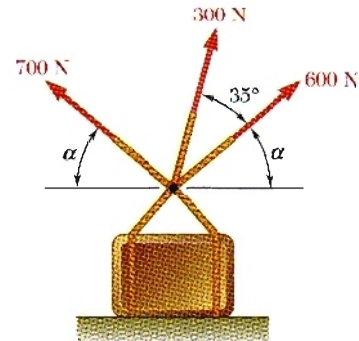


Figura P2.38

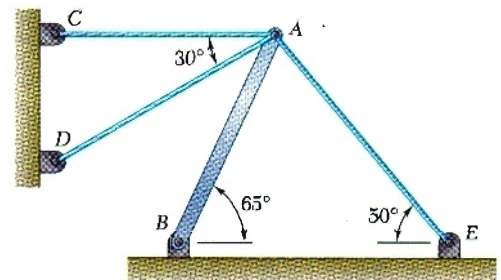


Figura P2.42

2.9. EQUILIBRIO DE UNA PARTÍCULA

En las secciones anteriores se expusieron los métodos utilizados para determinar la resultante de varias fuerzas que actúan sobre una partícula. Aunque no ha ocurrido en ninguno de los problemas examinados hasta ahora, es posible que la resultante sea cero. En tal caso, el efecto neto de las fuerzas dadas es cero, y se dice que la partícula está en equilibrio. Entonces se tiene la siguiente definición: *si la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre una partícula es cero, la partícula se encuentra en equilibrio*.

Una partícula sometida a la acción de dos fuerzas estará en equilibrio si ambas fuerzas tienen la misma magnitud, la misma línea de acción, pero sentidos opuestos. Entonces la resultante de las dos fuerzas es cero. En la figura 2.26 se ilustra este caso.

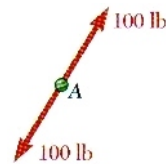


Figura 2.26

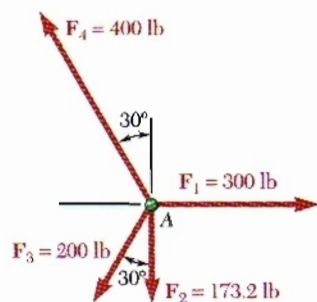


Figura 2.27

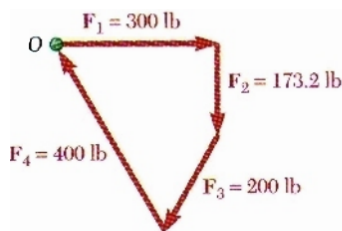


Figura 2.28

Otro caso de una partícula en equilibrio se muestra en la figura 2.27, donde aparecen cuatro fuerzas que actúan sobre A. En la figura 2.28, la resultante de las fuerzas dadas se determina por la regla del polígono. Empezando en el punto O con F_1 y acomodando las fuerzas punta a cola, se encuentra que la punta de F_4 coincide con el punto de partida O, así que la resultante R del sistema de fuerzas dado es cero y la partícula está en equilibrio.

El polígono cerrado de la figura 2.28 proporciona una expresión gráfica del equilibrio de A. Para expresar en forma *algebraica* las condiciones del equilibrio de una partícula se escribe

$$\mathbf{R} = \Sigma \mathbf{F} = 0 \quad (2.14)$$

Descomponiendo cada fuerza \mathbf{F} en sus componentes rectangulares, se tiene

$$\Sigma (F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j}) = 0 \quad \text{o} \quad (\Sigma F_x) \mathbf{i} + (\Sigma F_y) \mathbf{j} = 0$$

Se concluye que las condiciones necesarias y suficientes para el equilibrio de una partícula son

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma F_y = 0 \quad (2.15)$$

Regresando a la partícula mostrada en la figura 2.27, se comprueba que las condiciones de equilibrio se satisfacen. Se escribe

$$\begin{aligned} \Sigma F_x &= 300 \text{ lb} - (200 \text{ lb}) \sin 30^\circ - (400 \text{ lb}) \sin 30^\circ \\ &= 300 \text{ lb} - 100 \text{ lb} - 200 \text{ lb} = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Sigma F_y &= -173.2 \text{ lb} - (200 \text{ lb}) \cos 30^\circ + (400 \text{ lb}) \cos 30^\circ \\ &= -173.2 \text{ lb} - 173.2 \text{ lb} + 346.4 \text{ lb} = 0 \end{aligned}$$

2.10. PRIMERA LEY DEL MOVIMIENTO DE NEWTON

A finales del siglo XVIII Sir Isaac Newton formuló tres leyes fundamentales en las que se basa la ciencia de la mecánica. La primera de estas leyes puede enunciarse como sigue:

Si la fuerza resultante que actúa sobre una partícula es cero, la partícula permanecerá en reposo (si originalmente estaba en reposo) o se moverá con velocidad constante en línea recta (si originalmente estaba en movimiento).

De esta ley y de la definición de equilibrio expuesta en la sección 2.9, se deduce que una partícula en equilibrio puede estar en reposo o moviéndose en línea recta con velocidad constante. En la siguiente sección se considerarán varios problemas concernientes al equilibrio de una partícula.

2.11. PROBLEMAS RELACIONADOS CON EL EQUILIBRIO DE UNA PARTÍCULA. DIAGRAMAS DE CUERPO LIBRE.

En la práctica, un problema de ingeniería mecánica se deriva de una situación física real. Un esquema que muestra las condiciones físicas del problema se conoce como *diagrama espacial*.

Los métodos de análisis estudiados en las secciones anteriores se aplican a un sistema de fuerzas que actúan sobre una partícula. Un gran número de problemas que tratan de estructuras pueden reducirse a problemas concernientes al equilibrio de una partícula. Esto se hace

escogiendo una partícula significativa y dibujando un diagrama separado que muestre a ésta y a todas las fuerzas que actúan sobre ella. Dicho diagrama se conoce como *diagrama de cuerpo libre*.

Por ejemplo, considérese el embalaje de madera de 75 kg mostrado en el diagrama espacial de la figura 2.29a. Éste descansaba entre dos edificios y ahora es levantado hacia la plataforma de un camión que lo quitará de ahí. El embalaje está soportado por un cable vertical unido en A a dos cuerdas que pasan sobre poleas fijas a los edificios en B y C. Se desea determinar la tensión en cada una de las cuerdas AB y AC.

Para resolver el problema debe trazarse un diagrama de cuerpo libre que muestre a la partícula en equilibrio. Puesto que se analizan las tensiones en las cuerdas, el diagrama de cuerpo libre debe incluir al menos una de estas tensiones y si es posible a ambas. El punto A parece ser un buen cuerpo libre para este problema. El diagrama de cuerpo libre del punto A se muestra en la figura 2.29b. Ésta muestra al punto A y las fuerzas ejercidas sobre A por el cable vertical y las dos cuerdas. La fuerza ejercida por el cable está dirigida hacia abajo y es igual al peso W del contenedor. De acuerdo con la ecuación (1.4), se escribe

$$W = mg = (75 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2) = 736 \text{ N}$$

y se indica este valor en el diagrama de cuerpo libre. Las fuerzas ejercidas por las dos cuerdas no se conocen, pero como son iguales en magnitud a la tensión en la cuerda AB y en la cuerda AC, se representan con T_{AB} y T_{AC} y se dibujan hacia fuera de A en las direcciones mostradas por el diagrama espacial. No se incluyen otros detalles en el diagrama de cuerpo libre.

Puesto que el punto A está en equilibrio, las tres fuerzas que actúan sobre él deben formar un triángulo cerrado cuando se dibujan de punta a cola. Este *triángulo de fuerzas* ha sido dibujado en la figura 2.29c. Los vectores T_{AB} y T_{AC} de las tensiones en las cuerdas pueden encontrarse gráficamente si el triángulo se dibuja a escala, o pueden encontrarse mediante la trigonometría. Si se escoge el último método de solución, con la ley de los senos se escribe

$$\frac{T_{AB}}{\sin 60^\circ} = \frac{T_{AC}}{\sin 40^\circ} = \frac{736 \text{ N}}{\sin 80^\circ}$$

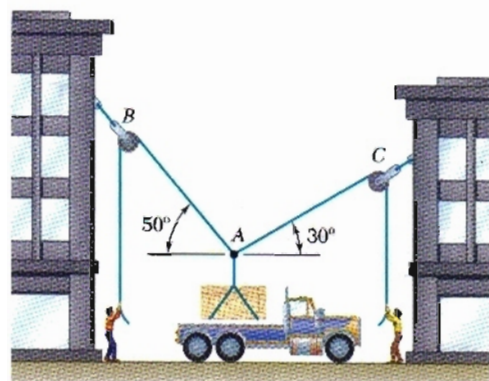
$$T_{AB} = 647 \text{ N} \quad T_{AC} = 480 \text{ N}$$

Cuando una partícula está en *equilibrio bajo tres fuerzas*, el problema siempre puede resolverse dibujando un triángulo de fuerzas. Cuando una partícula está en *equilibrio bajo más de tres fuerzas*, el problema puede resolverse gráficamente dibujando un polígono de fuerzas. Si se desea una solución analítica, se deben resolver las *ecuaciones de equilibrio* dadas en la sección 2.9:

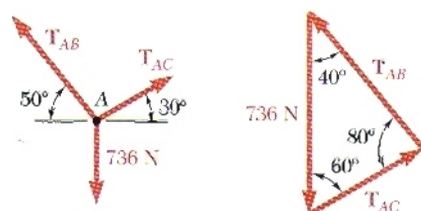
$$\sum F_x = 0 \quad \sum F_y = 0 \quad (2.15)$$

Estas ecuaciones pueden resolverse para no más de *dos incógnitas*; en forma semejante, el triángulo de fuerzas usado en el caso de equilibrio bajo tres fuerzas puede resolverse para dos incógnitas.

Los tipos más comunes de problemas son aquellos donde las dos incógnitas representan 1) las dos componentes (o la magnitud y dirección) de una sola fuerza, 2) las magnitudes de las dos fuerzas, cada una de dirección conocida. También se encuentran problemas que requieren la determinación del valor máximo o mínimo de la magnitud de una fuerza (véanse problemas 2.59 a 2.63).



a) Diagrama espacial

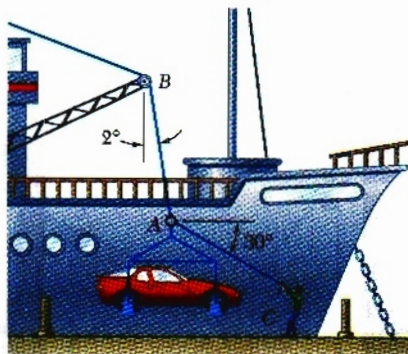


b) Diagrama de cuerpo libre; c) Triángulo de fuerzas

Figura 2.29



Fotografía 2.2 Como se ilustró en un ejemplo anterior, es posible determinar las tensiones en los cables que sostienen al eje que se muestra en la fotografía, considerando al gancho como una partícula y después aplicando las ecuaciones de equilibrio a las fuerzas que actúan sobre el gancho.



PROBLEMA RESUELTO 2.4

En la operación de descarga de un barco, un automóvil de 3 500 lb es soportado por un cable. Se ata una cuerda al cable en A y se tira para centrar al automóvil sobre la posición deseada. El ángulo entre el cable y la vertical es de 2° , mientras que el ángulo entre la cuerda y la horizontal es de 30° . ¿Cuál es la tensión en la cuerda?

SOLUCIÓN

Diagrama de cuerpo libre. Se escoge el punto A como cuerpo libre y se dibuja el diagrama completo de cuerpo libre. T_{AB} es la tensión en el cable AB y T_{AC} es la tensión de la cuerda.

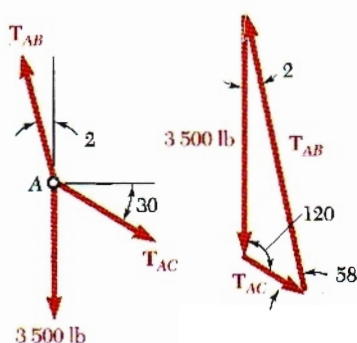
Condición de equilibrio. Como sólo actúan tres fuerzas sobre el cuerpo libre, se dibuja un triángulo de fuerzas para expresar que éste se encuentra en equilibrio. Con la ley de los senos se escribe

$$\frac{T_{AB}}{\sin 120^\circ} = \frac{T_{AC}}{\sin 2^\circ} = \frac{3\,500 \text{ lb}}{\sin 58^\circ}$$

Utilizando una calculadora, primero se calcula y se guarda el valor del último cociente. Se multiplica este valor en forma sucesiva por $\sin 120^\circ$ y $\sin 2^\circ$, se obtiene

$$T_{AB} = 3\,570 \text{ lb}$$

$$T_{AC} = 144 \text{ lb}$$



PROBLEMA RESUELTO 2.5

Determine la magnitud, dirección y sentido de la fuerza F más pequeña que mantendrá en equilibrio al paquete que se muestra al margen. Nótese que la fuerza ejercida por los rodillos sobre el paquete es perpendicular al plano inclinado.

SOLUCIÓN

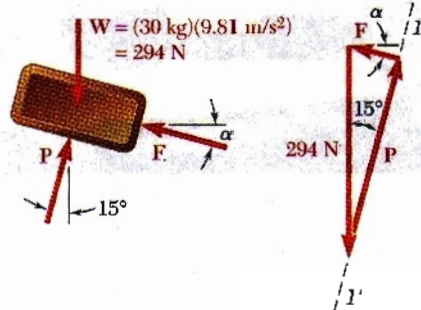
Diagrama de cuerpo libre. Se escoge el paquete como cuerpo libre, suponiendo que éste se puede tratar como partícula. Se dibuja el diagrama de cuerpo libre correspondiente.

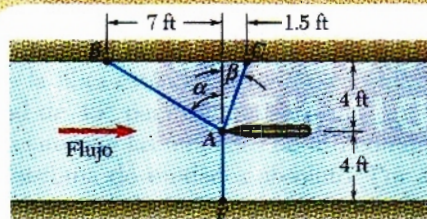
Condición de equilibrio. Puesto que sólo actúan tres fuerzas sobre el cuerpo libre, se dibuja un triángulo de fuerzas para expresar que está en equilibrio. La línea $1-1'$ representa la dirección conocida de P . Para obtener el valor mínimo de la fuerza F se escoge la dirección de F perpendicular a la de P . De la geometría del triángulo obtenido, se encuentra que

$$F = (294 \text{ N}) \sin 15^\circ = 76.1 \text{ N}$$

$$\alpha = 15^\circ$$

$$F = 76.1 \text{ N} \searrow 15^\circ$$





PROBLEMA RESUELTO 2.6

Como parte del diseño de un nuevo velero, se desea determinar la fuerza de arrastre que puede esperarse a cierta velocidad. Para hacerlo, se coloca un modelo del casco propuesto en un canal de prueba y se usan tres cables para mantener su proa en el eje del centro del canal. Las lecturas de los dinamómetros indican que para una velocidad dada la tensión es de 40 lb en el cable AB y de 60 lb en el cable AE. Determine la fuerza de arrastre ejercida sobre el casco y la tensión en el cable AC.

SOLUCIÓN

Determinación de los ángulos. En primer lugar se determinan los ángulos α y β que definen las direcciones de los cables AB y AC. Se escribe

$$\tan \alpha = \frac{7 \text{ ft}}{4 \text{ ft}} = 1.75 \quad \tan \beta = \frac{1.5 \text{ ft}}{4 \text{ ft}} = 0.375$$

$$\alpha = 60.26^\circ \quad \beta = 20.56^\circ$$

Diagrama de cuerpo libre. Se escoge el casco como cuerpo libre, se traza el diagrama del cuerpo libre que incluye las fuerzas ejercidas por los tres cables sobre el casco, así como la fuerza de arrastre F_D ejercida por el flujo.

Condición de equilibrio. Se expresa que el casco está en equilibrio y la resultante de todas las fuerzas se escribe como cero:

$$\mathbf{R} = \mathbf{T}_{AB} + \mathbf{T}_{AC} + \mathbf{T}_{AE} + \mathbf{F}_D = 0 \quad (1)$$

Como aparecen más de tres fuerzas, se obtendrán sus componentes x y y :

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_{AB} &= -(40 \text{ lb}) \sin 60.26^\circ \mathbf{i} + (40 \text{ lb}) \cos 60.26^\circ \mathbf{j} \\ &= -(34.73 \text{ lb}) \mathbf{i} + (19.84 \text{ lb}) \mathbf{j} \\ \mathbf{T}_{AC} &= T_{AC} \sin 20.56^\circ \mathbf{i} + T_{AC} \cos 20.56^\circ \mathbf{j} \\ &= 0.3512 T_{AC} \mathbf{i} + 0.9363 T_{AC} \mathbf{j} \\ \mathbf{T}_{AE} &= -(60 \text{ lb}) \mathbf{j} \\ \mathbf{F}_D &= F_D \mathbf{i} \end{aligned}$$

Se sustituyen las expresiones obtenidas en la ecuación (1) y se factorizan los vectores unitarios \mathbf{i} y \mathbf{j} , por lo que se tiene

$$(-34.73 \text{ lb} + 0.3512 T_{AC} + F_D) \mathbf{i} + (19.84 \text{ lb} + 0.9363 T_{AC} - 60 \text{ lb}) \mathbf{j} = 0$$

Esta ecuación se cumplirá si, y sólo si, los coeficientes de \mathbf{i} y \mathbf{j} son iguales a cero. Así se obtienen las siguientes dos ecuaciones de equilibrio, que expresan, respectivamente, que la suma de las componentes x y la suma de las componentes y de las fuerzas dadas debe ser cero.

$$\sum F_x = 0: \quad -34.73 \text{ lb} + 0.3512 T_{AC} + F_D = 0 \quad (2)$$

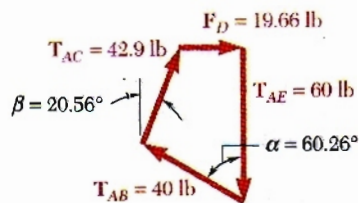
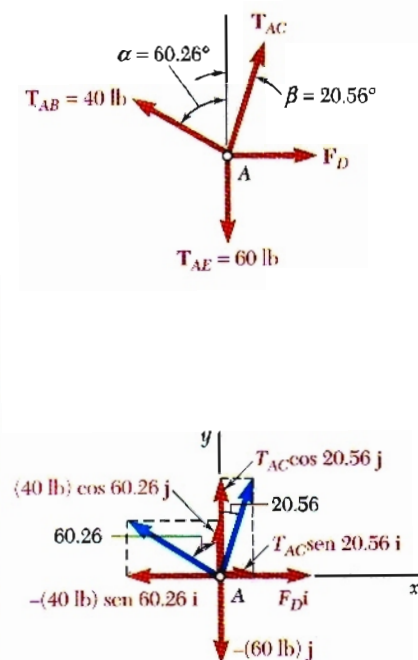
$$\sum F_y = 0: \quad 19.84 \text{ lb} + 0.9363 T_{AC} - 60 \text{ lb} = 0 \quad (3)$$

De la ecuación (3) se encuentra

$$T_{AC} = +42.9 \text{ lb} \quad \blacktriangleleft$$

y sustituyendo este valor en la ecuación (2) se obtiene $F_D = +19.66 \text{ lb}$ \blacktriangleleft

Al dibujar el diagrama de cuerpo libre se supuso que había un sentido para cada fuerza desconocida. El signo positivo en la respuesta señala que el sentido supuesto era el correcto. Puede dibujarse el polígono de fuerzas completo y así comprobar los resultados.



RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

Cuando una partícula está en *equilibrio*, la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre la partícula debe ser igual a cero. En el caso de una partícula sobre la que actúan *fuerzas coplanarias*, expresar este hecho proporcionará dos relaciones entre las fuerzas involucradas. Como se vio en los problemas resueltos recién presentados, estas relaciones pueden utilizarse para determinar dos incógnitas —como la magnitud y la dirección de una fuerza o las magnitudes de dos fuerzas—.

Trazar un diagrama de cuerpo libre es el primer paso a seguir en la solución de un problema que involucre el equilibrio de una partícula. En este diagrama se muestran la partícula y todas las fuerzas que actúan sobre ella. En el diagrama de cuerpo libre debe indicarse la magnitud de las fuerzas conocidas, así como cualquier ángulo o dimensión que defina la dirección de una fuerza. Cualquier magnitud o ángulo desconocido deben designarse por medio de un símbolo adecuado. No tiene que incluirse ninguna otra información adicional en el diagrama de cuerpo libre.

Es indispensable trazar un diagrama de cuerpo libre claro y preciso para poder resolver cualquier problema de equilibrio. La omisión de este paso puede ahorrarnos lápiz y papel, pero es muy probable que nos lleve a una solución incorrecta.

Caso 1. Si sólo están involucradas tres fuerzas en el diagrama de cuerpo libre, el resto de la solución se lleva a cabo más fácilmente uniendo en un dibujo la parte terminal de una fuerza con la parte inicial de otra (punta), para formar un *triángulo de fuerzas*. Este triángulo puede resolverse gráficamente o por trigonometría para un máximo de dos incógnitas [problemas resueltos 2.4 y 2.5].

Caso 2. Si están involucradas más de tres fuerzas, lo más conveniente es emplear una *solución analítica*. Los ejes x y y se seleccionan y cada una de las fuerzas mostradas en el diagrama de cuerpo libre se descompone en sus componentes x y y . Al expresar que tanto la suma de las componentes en x como la suma de las componentes en y de las fuerzas son iguales a cero, se obtienen dos ecuaciones que pueden resolverse para no más de dos incógnitas [problema resuelto 2.6].

Se recomienda firmemente que al emplear una solución analítica se escriban las ecuaciones de equilibrio en la misma forma que las ecuaciones (2) y (3) del problema resuelto 2.6. La práctica adoptada por algunos estudiantes de colocar al inicio las incógnitas del lado izquierdo de la ecuación y las cantidades conocidas del lado derecho puede llevar a una confusión al momento de asignar el signo correcto a cada uno de los términos.

Se ha señalado que, independientemente del método empleado para resolver un problema de equilibrio bidimensional, sólo puede determinarse un máximo de dos incógnitas. Si un problema bidimensional involucra más de dos incógnitas, deben obtenerse una o más relaciones adicionales a partir de la información contenida en el enunciado del problema.

Algunos de los siguientes problemas involucran pequeñas poleas. Se supondrá que las poleas están libres de fricción, por tanto, la tensión en la cuerda o cable que pase por una polea es la misma en cada uno de sus lados. En el capítulo 4 se analizará por qué la tensión es la misma. Por último, como veremos en el capítulo 10, la magnitud de la fuerza F ejercida sobre un cuerpo por un resorte estirado o comprimido está dada por $F = kx$, donde k es la constante del resorte y x es una medida de su compresión o estiramiento con respecto a la longitud del resorte cuando éste no ha sido deformado.

Problemas

2.43 Si $\alpha = 50^\circ$ y el agulón AC ejerce sobre la articulación C una fuerza dirigida a lo largo de la línea AC, determine a) la magnitud de la fuerza, b) la tensión en el cable BC.

2.44 Dos cables se amarran juntos en C y se cargan como indica la figura. Determine la tensión en a) el cable AC, b) el cable BC.

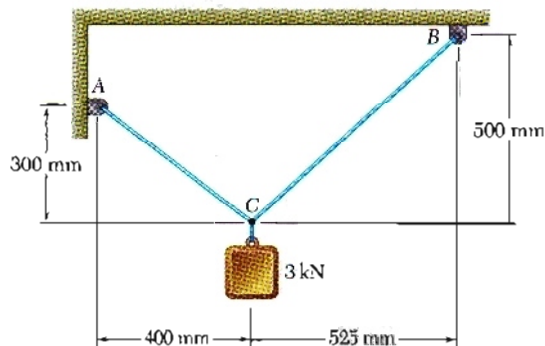


Figura P2.44

2.45 Una componente de máquina con forma irregular se mantiene en la posición mostrada en la figura por medio de tres sujetadores. Si $F_A = 940$ N, determine las magnitudes de las fuerzas F_B y F_C ejercidas por los otros dos sujetadores.

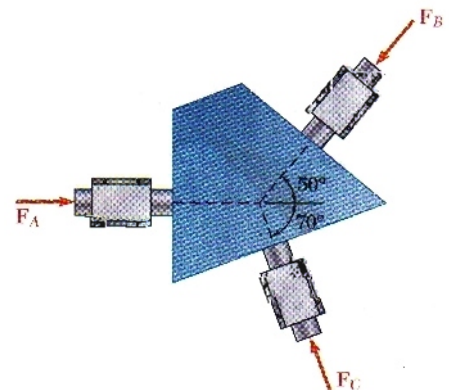


Figura P2.45

2.46 Las cuerdas AB y AC son lanzadas a una persona cuya lancha se ha hundido. Si $\alpha = 25^\circ$ y la magnitud de la fuerza F_R ejercida por el río sobre el lanchero es de 70 lb, determine la tensión en a) la cuerda AB, b) la cuerda AC.

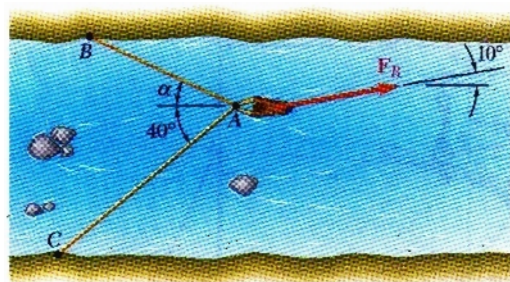


Figura P2.46

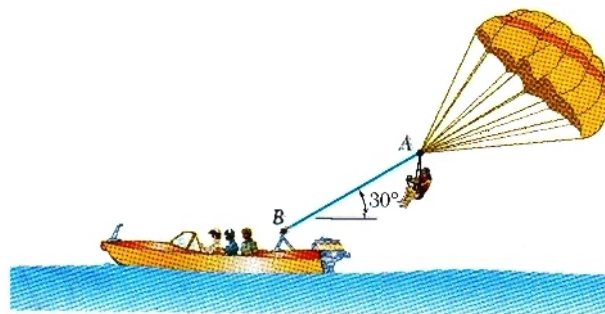


Figura P2.47

2.47 Un bote jala a un paracaídas y su pasajero a una velocidad constante. Si el pasajero pesa 550 N y la fuerza resultante R ejercida por el paracaídas sobre la horquilla A forma un ángulo de 65° con la horizontal, determine a) la tensión en la cuerda de remolque AB, b) la magnitud de R .

2.48 Dos semáforos se cuelgan temporalmente de un cable como se muestra en la figura. Si el semáforo colocado en B pesa 300 N, determine el peso del semáforo en C .

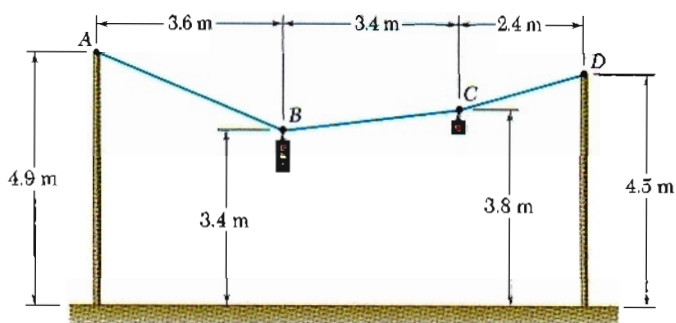


Figura P2.48

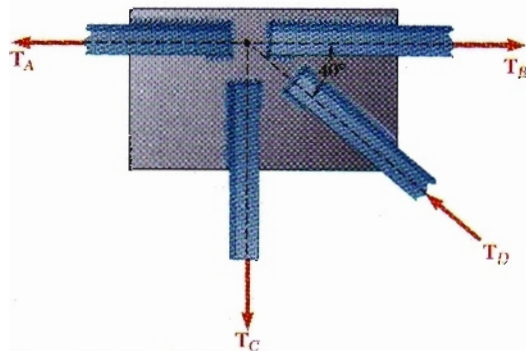


Figura P2.49 y P2.50

2.49 Dos fuerzas de magnitud $T_A = 8$ kips y $T_B = 15$ kips se aplican a una conexión soldada como indica la figura. Si la conexión está en equilibrio, determine las magnitudes de las fuerzas T_C y T_D .

2.50 Dos fuerzas de magnitud $T_A = 6$ kips y $T_C = 9$ kips se aplican a una conexión soldada como indica la figura. Si la conexión está en equilibrio, determine las magnitudes de las fuerzas T_B y T_D .

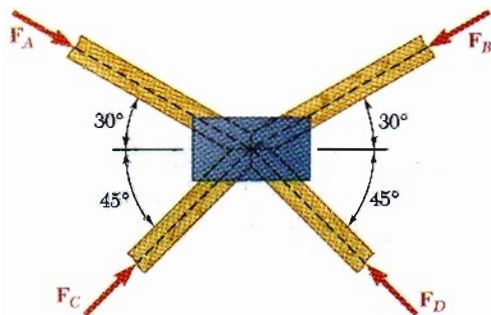


Figura P2.51 y P2.52

2.51 Los cuatro elementos de madera que se muestran en la figura están unidos con una placa de metal y se encuentran en equilibrio sometidos a la acción de cuatro fuerzas. Si $F_A = 2.3$ kN y $F_B = 2.1$ kN, determine las magnitudes de las otras dos fuerzas.

2.52 Los cuatro elementos de madera que se muestran en la figura están unidos con una placa de metal y se encuentran en equilibrio sometidos a la acción de cuatro fuerzas. Si $F_A = 1.9$ kN y $F_C = 2.4$ kN, determine las magnitudes de las otras dos fuerzas.

2.53 En un acto circense, un acróbata realiza un parado de manos sobre una rueda mientras su asistente lo jala a lo largo del cable ABC de 8 m de largo que se muestra en la figura. Si la tensión en la cuerda DE es de 35 N cuando el acróbata se sostiene en equilibrio en $a = 2.5$ m, determine *a*) el peso del acróbata, *b*) la tensión en el cable.

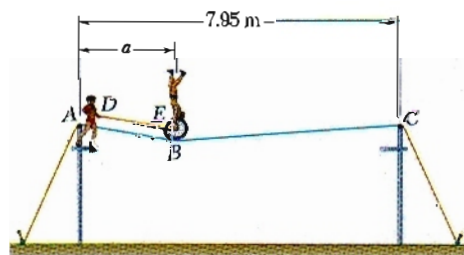


Figura P2.53 y P2.54

2.54 En un acto circense, un acróbata realiza un parado de manos sobre una rueda mientras su asistente lo jala a lo largo del cable ABC de 8 m de largo que se muestra en la figura. Si el acróbata pesa 720 N y se sostiene en equilibrio en $a = 3$ m, determine *a*) la tensión en el cable, *b*) la tensión en la cuerda DE .

2.55 Dos cables se amarran juntos en C y son cargados como indica la figura. Si $W = 190$ lb, determine la tensión en *a*) el cable AC , *b*) el cable BC .

2.56 Dos cables se amarran juntos en C y son cargados como indica la figura. Determine el rango de valores de W para los que la tensión no será mayor de 240 lb en cualquiera de los cables.

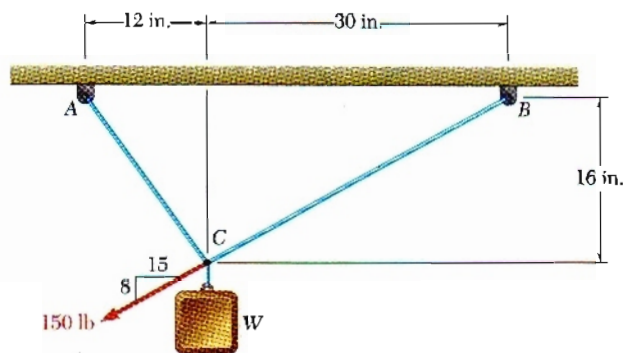


Figura P2.55 y P2.56

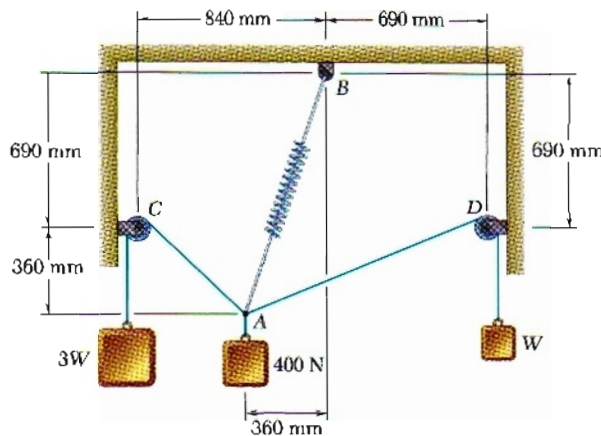


Figura P2.57

2.57 Una carga con peso de 400 N está suspendida de un resorte y dos cuerdas, las cuales se unen a dos bloques de pesos $3W$ y W como se muestra en la figura. Si la constante del resorte es de 800 N/m, determine *a*) el valor de W , *b*) la longitud sin estirar del resorte.

2.58 Un bloque de peso W está suspendido de una cuerda de 25 in. de largo y de dos resortes cuyas longitudes sin estirar miden 22.5 in. cada una. Si las constantes de los resortes son $k_{AB} = 9$ lb/in. y $k_{AD} = 3$ lb/in., determine *a*) la tensión en la cuerda, *b*) el peso del bloque.

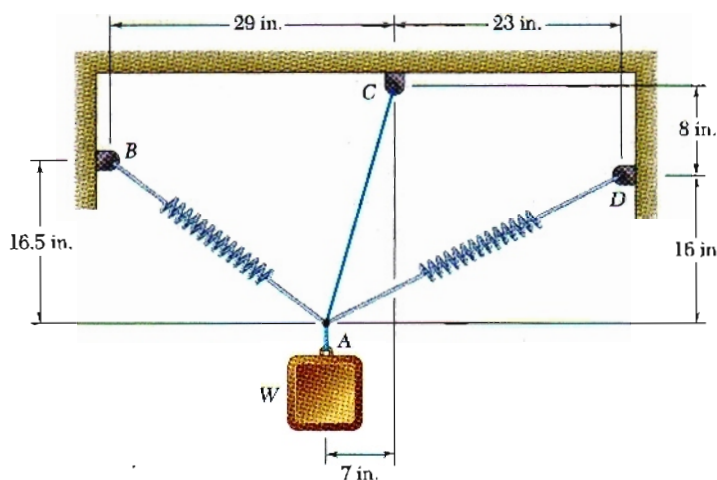


Figura P2.58

2.59 Para las cuerdas y la fuerza del río del problema 2.46, determine *a*) el valor de α para el que la tensión en la cuerda AB es la mínima posible, *b*) el valor correspondiente de la tensión.

2.60 Dos cables se amarran juntos en C y se cargan como indica la figura. Si la tensión máxima permisible en cada cable es de 900 N, determine *a*) la magnitud de la fuerza P máxima que puede aplicarse en C , *b*) el valor correspondiente de α .

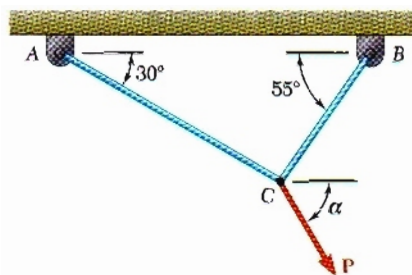


Figura P2.60 y P2.61

2.61 Dos cables se amarran juntos en C y se cargan como indica la figura. Si la tensión máxima permisible en el cable AC es de 1 400 N y en el cable BC es de 700 N, determine *a*) la magnitud de la fuerza P máxima que puede aplicarse en C , *b*) el valor correspondiente de α .

2.62 Si las porciones AC y BC del cable ACB deben ser iguales, determine la longitud mínima que debe tener el cable para soportar la carga mostrada si la tensión en éste no debe ser mayor a 870 N.

2.63 Para la estructura y la carga del problema 2.43, determine *a*) el valor de α para el que la tensión en el cable BC es mínima, *b*) el valor correspondiente de la tensión.

2.64 El collarín A puede deslizarse sin fricción en una barra vertical y está conectado a un resorte como indica la figura. La constante del resorte es de 4 lb/in. y éste no se encuentra estirado cuando $h = 12$ in. Si el sistema está en equilibrio cuando $h = 16$ in., determine el peso del collarín.

2.65 El collarín A de 9 lb puede deslizarse sin fricción en una barra vertical y está conectado a un resorte como indica la figura. El resorte no está estirado cuando $h = 12$ in. Si la constante del resorte es de 3 lb/in., determine el valor de h para el cual el sistema está en equilibrio.

2.66 El aguilón AB está soportado por el cable BC y una bisagra colocada en A . Si el aguilón ejerce sobre el punto B una fuerza dirigida a lo largo de sí mismo y la tensión en la cuerda BD es de 310 N, determine *a*) el valor de α para el que la tensión en el cable BC es mínima, *b*) el valor correspondiente de la tensión.

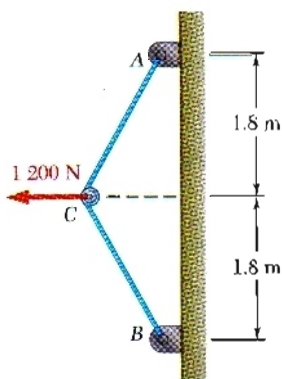


Figura P2.62

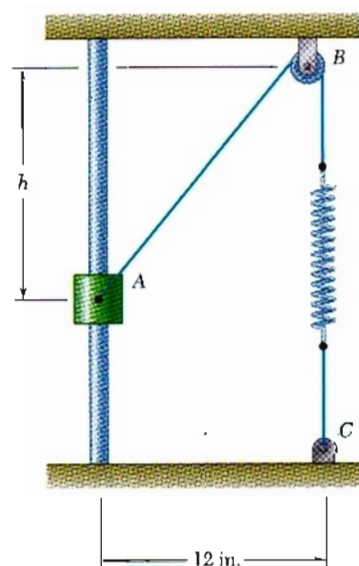


Figura P2.64 y P2.65

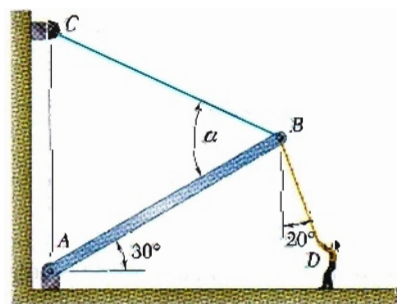


Figura P2.66

2.67 La fuerza \mathbf{P} se aplica a una pequeña rueda que gira sobre el cable ACB. Si la tensión en ambas partes del cable es de 140 lb, determine la magnitud y la dirección de \mathbf{P} .

2.68 Una caja de madera de 280 kg está sostenida por varios arreglos de poleas y cuerdas, según indica la figura. Determine la tensión en la cuerda para cada arreglo. (Sugerencia: La tensión es la misma en ambos lados de una cuerda que pasa por una polea simple. Esto puede comprobarse aplicando los métodos del capítulo 4.)

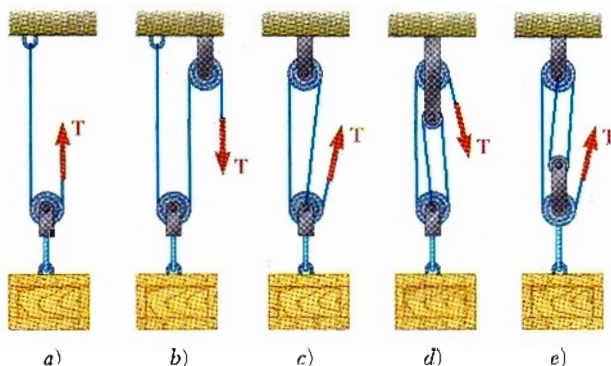


Figura P2.68

2.69 Resuelva los incisos b) y d) del problema 2.68 suponiendo que el extremo libre de la cuerda está unido a la caja de madera.

2.70 Una carga \mathbf{Q} se aplica a la polea C, la cual puede rodar sobre el cable ACB. La polea se sostiene en la posición mostrada en la figura mediante un segundo cable CAD que pasa por la polea A y sostiene una carga \mathbf{P} . Si $P = 800 \text{ N}$, determine a) la tensión en el cable ACB, b) la magnitud de la carga \mathbf{Q} .

2.71 Una carga \mathbf{Q} de 2 000 N se aplica a la polea C, la cual puede rodar sobre el cable ACB. La polea se sostiene en la posición mostrada en la figura mediante un segundo cable CAD que pasa por la polea A y sostiene una carga \mathbf{P} . Determine a) la tensión en el cable ACB, b) la magnitud de la carga \mathbf{P} .

2.72 Se aplican tres fuerzas a una ménsula. Las direcciones de las dos fuerzas de 30 lb pueden variar, pero el ángulo entre ellas siempre es de 50° . Determine el rango de valores de α para el que la magnitud de la resultante de las fuerzas aplicadas a la ménsula es menor a 120 lb.

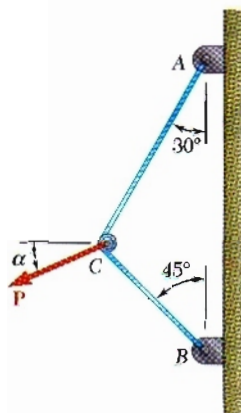


Figura P2.67

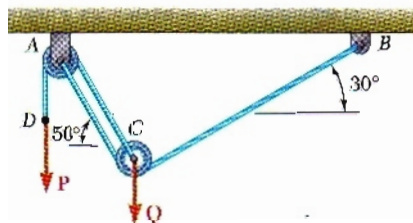


Figura P2.70 y P2.71

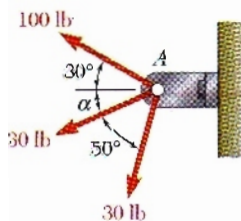


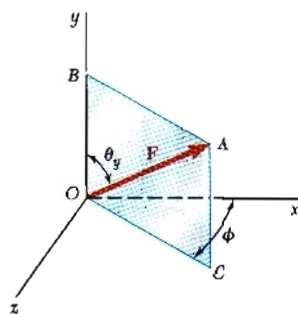
Figura P2.72

FUERZAS EN EL ESPACIO

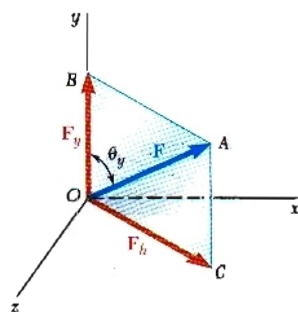
2.12. COMPONENTES RECTANGULARES DE UNA FUERZA EN EL ESPACIO

Los problemas considerados en la primera parte de este capítulo involucraron únicamente dos dimensiones y pudieron formularse y resolverse en un solo plano. En esta sección y en las secciones siguientes del capítulo se analizarán problemas que comprenden las tres dimensiones del espacio.

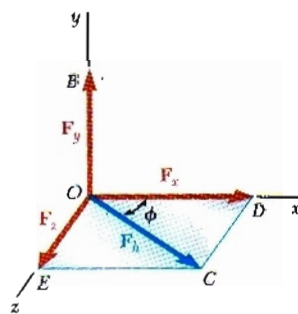
Considere una fuerza \mathbf{F} que actúa en el origen O del sistema de coordenadas rectangulares x, y, z . Para definir la dirección de \mathbf{F} , se traza el plano vertical $OBAC$ que contiene a \mathbf{F} y que se muestra en la figura 2.30a. Este plano pasa a través del eje vertical y ; su orientación



a)



b)



c)

Figura 2.30

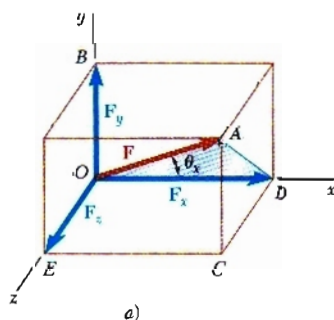


Figura 2.31

está definida por el ángulo ϕ que forma con el plano xy , mientras que la dirección de \mathbf{F} dentro del plano está definida por el ángulo θ_y que forma \mathbf{F} con el eje y . La fuerza \mathbf{F} puede descomponerse en una componente vertical F_y y una componente horizontal F_h ; esta operación, mostrada en la figura 2.30b, se realiza en el plano OAC de acuerdo con las reglas desarrolladas en la primera parte del capítulo. Las componentes escalares correspondientes son

$$F_y = F \cos \theta_y \quad F_h = F \sin \theta_y \quad (2.16)$$

La F_h puede separarse en sus dos componentes rectangulares F_x y F_z a lo largo de los ejes x y z , respectivamente. Esta operación, mostrada en la figura 2.30c, se realiza en el plano xz . De esta manera se obtienen las expresiones siguientes para las componentes escalares correspondientes:

$$\begin{aligned} F_x &= F_h \cos \phi = F \sin \theta_y \cos \phi \\ F_z &= F_h \sin \phi = F \sin \theta_y \sin \phi \end{aligned} \quad (2.17)$$

La fuerza \mathbf{F} se ha descompuesto en tres componentes vectoriales rectangulares F_x , F_y y F_z , dirigidas a lo largo de los tres ejes coordenados.

Si se aplica el teorema de Pitágoras a los triángulos OAB y OCD de la figura 2.30, se escribe

$$\begin{aligned} F^2 &= (OA)^2 = (OB)^2 + (BA)^2 = F_y^2 + F_h^2 \\ F_h^2 &= (OC)^2 = (OD)^2 + (DC)^2 = F_x^2 + F_z^2 \end{aligned}$$

Si se eliminan F_h^2 de estas dos ecuaciones y se resuelve para F se obtiene la siguiente relación entre la magnitud de \mathbf{F} y sus componentes rectangulares escalares:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \quad (2.18)$$

La relación que existe entre la fuerza \mathbf{F} y sus tres componentes F_x , F_y y F_z se presenta más fácil si se traza "una caja" que tiene por aristas F_x , F_y y F_z , como se muestra en la figura 2.31. La fuerza \mathbf{F} está representada por la diagonal OA de esta caja. La figura 2.31b muestra el triángulo rectángulo OAB empleado para deducir la primera de las fórmulas (2.16): $F_y = F \cos \theta_y$. En las figuras 2.31a y c se han trazado otros dos triángulos rectángulos: el OAD y el OAE . Estos ocupan posiciones semejantes a la del triángulo OAB . Si representamos por θ_x y θ_z los ángulos que forma \mathbf{F} con los ejes x y z , respectivamente, se pueden escribir dos fórmulas semejantes a $F_y = F \cos \theta_y$. Entonces se escribe

$$F_x = F \cos \theta_x \quad F_y = F \cos \theta_y \quad F_z = F \cos \theta_z \quad (2.19)$$

Los tres ángulos θ_x , θ_y y θ_z definen la dirección de la fuerza \mathbf{F} ; y son más usados que los ángulos θ_y y ϕ introducidos al comienzo de esta sección. Los cosenos de θ_x , θ_y y θ_z se conocen como los *cosenos directores* de la fuerza \mathbf{F} .

Con el uso de los vectores unitarios \mathbf{i} , \mathbf{j} y \mathbf{k} , dirigidos a lo largo de los ejes x , y y z , respectivamente (figura 2.32), se puede expresar \mathbf{F} en la forma

$$\mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k} \quad (2.20)$$

donde las componentes escalares F_x , F_y y F_z están definidas por las relaciones (2.19).

Ejemplo 1. Una fuerza de 500 N forma ángulos de 60° , 45° y 120° con los ejes x , y y z , respectivamente. Encuentre las componentes F_x , F_y y F_z de la fuerza.

Sustituyendo $F = 500 \text{ N}$, $\theta_x = 60^\circ$, $\theta_y = 45^\circ$ y $\theta_z = 120^\circ$ en las fórmulas (2.19), se escribe

$$F_x = (500 \text{ N}) \cos 60^\circ = +250 \text{ N}$$

$$F_y = (500 \text{ N}) \cos 45^\circ = +354 \text{ N}$$

$$F_z = (500 \text{ N}) \cos 120^\circ = -250 \text{ N}$$

Usando en la ecuación (2.20) los valores obtenidos para las componentes escalares de \mathbf{F} , se tiene

$$\mathbf{F} = (250 \text{ N})\mathbf{i} + (354 \text{ N})\mathbf{j} - (250 \text{ N})\mathbf{k}$$

Como en el caso de los problemas en dos dimensiones, el signo positivo indica que la componente tiene el mismo sentido que el eje correspondiente y el signo negativo tiene el sentido opuesto.

El ángulo que una fuerza \mathbf{F} forma con un eje debe medirse desde el lado positivo del eje y estará siempre comprendido entre 0 y 180° . Un ángulo θ_x menor que 90° (agudo) indica que \mathbf{F} (que se supone unida al origen) está del mismo lado del plano yz que el eje x positivo, y $\cos \theta_x$ y F_x serán positivos. Un ángulo θ_x mayor que 90° (obtuso) indicará que \mathbf{F} está al otro lado del plano yz ; entonces, $\cos \theta_x$ y F_x serán negativos. En el ejemplo 1 los ángulos θ_x y θ_y son agudos, mientras que θ_z es obtuso; en consecuencia, F_x y F_y son positivos, mientras que F_z es negativo.

Si se sustituye en la ecuación (2.20) las expresiones obtenidas para F_x , F_y y F_z en (2.19), se escribe

$$\mathbf{F} = F(\cos \theta_x \mathbf{i} + \cos \theta_y \mathbf{j} + \cos \theta_z \mathbf{k}) \quad (2.21)$$

que muestra que la fuerza \mathbf{F} puede expresarse como el producto del escalar F y del vector

$$\boldsymbol{\lambda} = \cos \theta_x \mathbf{i} + \cos \theta_y \mathbf{j} + \cos \theta_z \mathbf{k} \quad (2.22)$$

El vector $\boldsymbol{\lambda}$ es evidentemente un vector de magnitud 1 y de la misma dirección que \mathbf{F} (figura 2.33). El vector unitario $\boldsymbol{\lambda}$ se refiere al largo de la línea de acción de \mathbf{F} . De (2.22) se deduce que las componentes del vector unitario $\boldsymbol{\lambda}$ son, respectivamente, iguales a los cosenos directores de la línea de acción de \mathbf{F} :

$$\lambda_x = \cos \theta_x \quad \lambda_y = \cos \theta_y \quad \lambda_z = \cos \theta_z \quad (2.23)$$

Se debe observar que los valores de los tres ángulos θ_x , θ_y y θ_z no son independientes. Expresando que la suma de los cuadrados de las componentes de $\boldsymbol{\lambda}$ es igual al cuadrado de su magnitud, se escribe

$$\lambda_x^2 + \lambda_y^2 + \lambda_z^2 = 1$$

o sustituyendo para λ_x , λ_y y λ_z de (2.23),

$$\cos^2 \theta_x + \cos^2 \theta_y + \cos^2 \theta_z = 1 \quad (2.24)$$

En el ejemplo 1 se muestra que una vez que se han seleccionado los valores $\theta_x = 60^\circ$ y $\theta_y = 45^\circ$ el valor de θ_z debe ser igual a 60° o 120° para satisfacer la identidad (2.24).

Cuando las componentes F_x , F_y y F_z de una fuerza \mathbf{F} están dadas, la magnitud F de la fuerza se obtiene de (2.18). Entonces las relaciones (2.19) pueden resolverse para los cosenos directores,

$$\cos \theta_x = \frac{F_x}{F} \quad \cos \theta_y = \frac{F_y}{F} \quad \cos \theta_z = \frac{F_z}{F} \quad (2.25)$$

y obtener los ángulos θ_x , θ_y y θ_z que caracterizan a la dirección de \mathbf{F} .

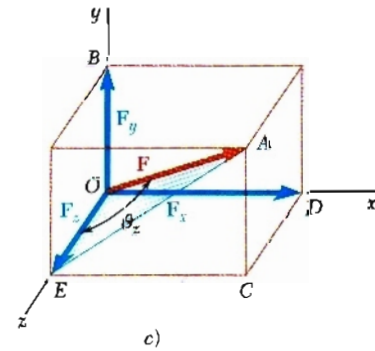
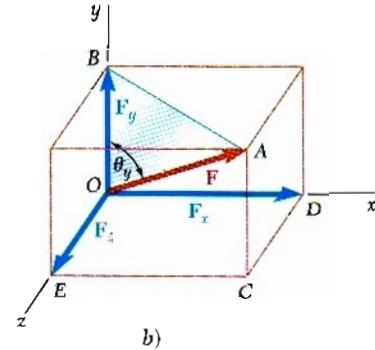


Figura 2.31

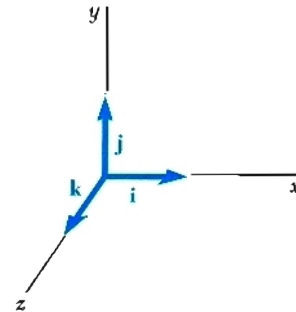


Figura 2.32

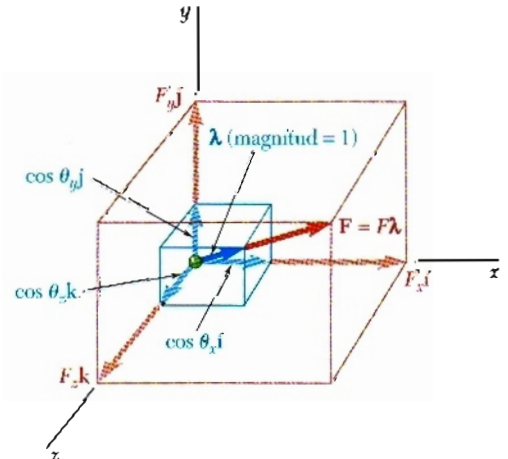


Figura 2.33

Ejemplo 2. Una fuerza \mathbf{F} tiene las componentes $F_x = 20$ lb, $F_y = -30$ lb y $F_z = 60$ lb. Determine la magnitud de F y los ángulos θ_x , θ_y y θ_z que forma con los ejes coordenados.

A partir de la fórmula (2.18) se obtiene[†]

$$\begin{aligned} F &= \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \\ &= \sqrt{(20 \text{ lb})^2 + (-30 \text{ lb})^2 + (60 \text{ lb})^2} \\ &= \sqrt{4\,900} \text{ lb} = 70 \text{ lb} \end{aligned}$$

Si se sustituyen los valores de las componentes y la magnitud de \mathbf{F} en las ecuaciones (2.25), se escribe

$$\cos \theta_x = \frac{F_x}{F} = \frac{20 \text{ lb}}{70 \text{ lb}} \quad \cos \theta_y = \frac{F_y}{F} = \frac{-30 \text{ lb}}{70 \text{ lb}} \quad \cos \theta_z = \frac{F_z}{F} = \frac{60 \text{ lb}}{70 \text{ lb}}$$

Calculando sucesivamente cada cociente y su arco coseno, se obtiene

$$\theta_x = 73.4^\circ \quad \theta_y = 115.4^\circ \quad \theta_z = 31.0^\circ$$

Estos cálculos pueden realizarse fácilmente con una calculadora.

2.13. FUERZA DEFINIDA EN TÉRMINOS DE SU MAGNITUD Y DOS PUNTOS SOBRE SU LÍNEA DE ACCIÓN

En muchas aplicaciones la dirección de una fuerza \mathbf{F} está definida por las coordenadas de dos puntos $M(x_1, y_1, z_1)$ y $N(x_2, y_2, z_2)$, localizadas sobre su línea de acción (figura 2.34). Considere el vector \overrightarrow{MN} que une

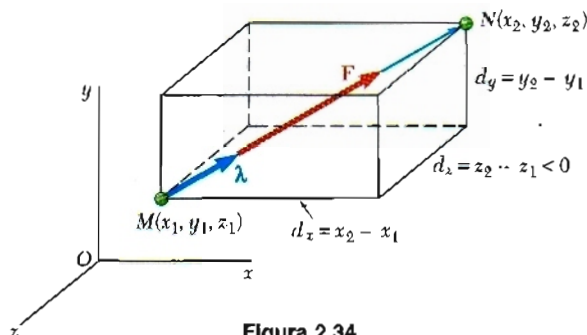


Figura 2.34

a M y N y tiene el mismo sentido que \mathbf{F} . Si se representan sus componentes escalares por d_x , d_y y d_z , respectivamente, se escribe

$$\overrightarrow{MN} = d_x \mathbf{i} + d_y \mathbf{j} + d_z \mathbf{k} \quad (2.26)$$

El vector unitario $\boldsymbol{\lambda}$ a lo largo de la línea de acción de \mathbf{F} (es decir a lo largo de la línea MN) puede obtenerse al dividir el vector \overrightarrow{MN} entre su magnitud MN . Se sustituye para \overrightarrow{MN} de (2.26) y se observa que MN es igual a la distancia d de M a N , se escribe

$$\boldsymbol{\lambda} = \frac{\overrightarrow{MN}}{MN} = \frac{1}{d} (d_x \mathbf{i} + d_y \mathbf{j} + d_z \mathbf{k}) \quad (2.27)$$

[†] Con una calculadora programada para convertir coordenadas rectangulares en coordenadas polares, se verá que el siguiente procedimiento resulta más expedito para calcular F : primero se determina F_h a partir de sus componentes rectangulares F_x y F_y (figura 2.30c), después se determina F a partir de sus componentes rectangulares F_h y F_z (figura 2.30b). El orden en que se introduzcan las tres componentes F_x , F_y y F_z resulta intrascendente.

Es importante recordar que \mathbf{F} es igual al producto de F y λ , por lo que se tiene

$$\mathbf{F} = F\lambda = \frac{F}{d}(d_x\mathbf{i} + d_y\mathbf{j} + d_z\mathbf{k}) \quad (2.28)$$

de la cual se sigue que las componentes de \mathbf{F} son, respectivamente,

$$F_x = \frac{Fd_x}{d} \quad F_y = \frac{Fd_y}{d} \quad F_z = \frac{Fd_z}{d} \quad (2.29)$$

Las relaciones (2.29) simplifican en forma considerable la determinación de las componentes de las fuerzas \mathbf{F} de magnitud F cuando la línea de acción de \mathbf{F} está definida por dos puntos M y N . Restando las coordenadas de M de las de N se determinan primero las componentes del vector \overline{MN} y la distancia d de M a N :

$$d_x = x_2 - x_1 \quad d_y = y_2 - y_1 \quad d_z = z_2 - z_1 \\ d = \sqrt{d_x^2 + d_y^2 + d_z^2}$$

Sustituyendo los valores para F y para d_x , d_y , d_z y d en las relaciones (2.29), se obtienen las componentes F_x , F_y y F_z de la fuerza.

Los ángulos θ_x , θ_y y θ_z que forman \mathbf{F} con los ejes coordenados pueden obtenerse de las ecuaciones (2.25). Comparando las ecuaciones (2.22) y (2.27) también se puede escribir

$$\cos \theta_x = \frac{d_x}{d} \quad \cos \theta_y = \frac{d_y}{d} \quad \cos \theta_z = \frac{d_z}{d} \quad (2.30)$$

y determinar los ángulos θ_x , θ_y y θ_z directamente de las componentes y la magnitud del vector \overline{MN} .

2.14. ADICIÓN DE FUERZAS CONCURRENTES EN EL ESPACIO

La resultante \mathbf{R} de dos o más fuerzas en el espacio se calcula sumando sus componentes rectangulares. Los métodos gráficos o trigonométricos no son muy prácticos en el caso de fuerzas en el espacio.

El método seguido aquí es semejante al empleado en la sección 2.8 con fuerzas coplanares. Se establece que

$$\mathbf{R} = \Sigma \mathbf{F}$$

se descompone cada fuerza en sus componentes rectangulares y se escribe

$$R_x\mathbf{i} + R_y\mathbf{j} + R_z\mathbf{k} = \Sigma(F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k}) \\ = (\Sigma F_x)\mathbf{i} + (\Sigma F_y)\mathbf{j} + (\Sigma F_z)\mathbf{k}$$

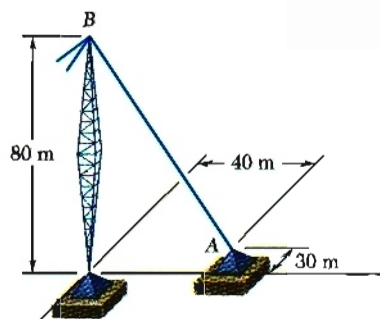
de la cual se desprende que

$$R_x = \Sigma F_x \quad R_y = \Sigma F_y \quad R_z = \Sigma F_z \quad (2.31)$$

La magnitud de la resultante y los ángulos θ_x , θ_y y θ_z que ésta forma con el eje de coordenadas se obtienen por el método de la sección 2.12. Se escribe

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} \quad (2.32)$$

$$\cos \theta_x = \frac{R_x}{R} \quad \cos \theta_y = \frac{R_y}{R} \quad \cos \theta_z = \frac{R_z}{R} \quad (2.33)$$



PROBLEMA RESUELTO 2.7

El alambre de una torre está anclado en A por medio de un perno. La tensión en el alambre es de 2 500 N. Determine a) las componentes F_x , F_y y F_z de la fuerza que actúa sobre el perno y b) los ángulos θ_x , θ_y y θ_z que definen la dirección de la fuerza.

SOLUCIÓN

a) Componentes de la fuerza. La línea de acción de la fuerza que actúa sobre el perno pasa por A y B y la fuerza está dirigida de A hacia B. Las componentes del vector \overline{AB} , que tienen la misma dirección que la fuerza, son

$$d_x = -40 \text{ m} \quad d_y = +80 \text{ m} \quad d_z = +30 \text{ m}$$

La distancia total de A a B es

$$AB = d = \sqrt{d_x^2 + d_y^2 + d_z^2} = 94.3 \text{ m}$$

Al representar por \mathbf{i} , \mathbf{j} y \mathbf{k} los vectores unitarios a lo largo de los ejes coordenados, se tiene

$$\overline{AB} = -(40 \text{ m})\mathbf{i} + (80 \text{ m})\mathbf{j} + (30 \text{ m})\mathbf{k}$$

Introduciendo el vector unitario $\boldsymbol{\lambda} = \overline{AB}/AB$, se escribe

$$\mathbf{F} = F\boldsymbol{\lambda} = F \frac{\overline{AB}}{AB} = \frac{2\,500 \text{ N}}{94.3 \text{ m}} \overline{AB}$$

Si se sustituye la expresión encontrada para \overline{AB} , se obtiene

$$\mathbf{F} = \frac{2\,500 \text{ N}}{94.3 \text{ m}} [-(40 \text{ m})\mathbf{i} + (80 \text{ m})\mathbf{j} + (30 \text{ m})\mathbf{k}]$$

$$\mathbf{F} = -(1\,060 \text{ N})\mathbf{i} + (2\,120 \text{ N})\mathbf{j} + (795 \text{ N})\mathbf{k}$$

Por consiguiente, las componentes de \mathbf{F} son

$$F_x = -1\,060 \text{ N} \quad F_y = +2\,120 \text{ N} \quad F_z = +795 \text{ N} \quad \blacktriangleleft$$

b) Dirección de la fuerza. Con las ecuaciones (2.25), se escribe

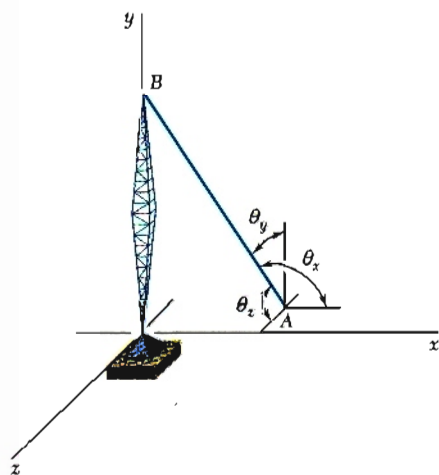
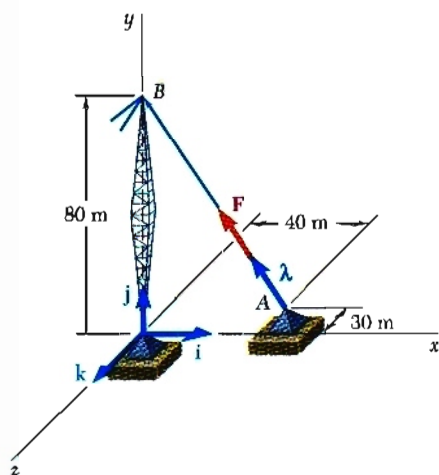
$$\cos \theta_x = \frac{F_x}{F} = \frac{-1\,060 \text{ N}}{2\,500 \text{ N}} \quad \cos \theta_y = \frac{F_y}{F} = \frac{+2\,120 \text{ N}}{2\,500 \text{ N}}$$

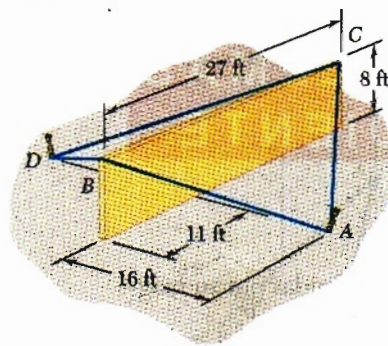
$$\cos \theta_z = \frac{F_z}{F} = \frac{+795 \text{ N}}{2\,500 \text{ N}}$$

Si se calcula sucesivamente cada cociente y su arco coseno, se obtiene

$$\theta_x = 115.1^\circ \quad \theta_y = 32.0^\circ \quad \theta_z = 71.5^\circ \quad \blacktriangleleft$$

(Nota: El resultado también pudo haberse determinado con las componentes y la magnitud del vector \overline{AB} en lugar de la fuerza \mathbf{F} .)





PROBLEMA RESUELTO 2.8

Una sección de una pared de concreto precolado se sostiene temporalmente por los cables mostrados. Se sabe que la tensión es de 840 lb en el cable AB y 1 200 lb en el cable AC, determine la magnitud y la dirección de la resultante de las fuerzas ejercidas por los cables AB y AC sobre la estaca A.

SOLUCIÓN

Componentes de las fuerzas. La fuerza ejercida por cada cable sobre la estaca A se descompondrá en sus componentes x , y y z . Primero se determinarán las componentes y la magnitud de los vectores \overrightarrow{AB} y \overrightarrow{AC} , midiéndolos desde A hacia la sección de la pared. Si se representa por \mathbf{i} , \mathbf{j} y \mathbf{k} a los vectores unitarios a lo largo de los ejes coordenados, se escribe

$$\overrightarrow{AB} = -(16 \text{ ft})\mathbf{i} + (8 \text{ ft})\mathbf{j} + (11 \text{ ft})\mathbf{k} \quad AB = 21 \text{ ft}$$

$$\overrightarrow{AC} = -(16 \text{ ft})\mathbf{i} + (8 \text{ ft})\mathbf{j} - (16 \text{ ft})\mathbf{k} \quad AC = 24 \text{ ft}$$

Al representar por λ_{AB} al vector unitario a lo largo de la línea AB, se tiene

$$\mathbf{T}_{AB} = T_{AB}\lambda_{AB} = T_{AB}\frac{\overrightarrow{AB}}{AB} = \frac{840 \text{ lb}}{21 \text{ ft}}\overrightarrow{AB}$$

Al sustituir la expresión encontrada para \overrightarrow{AB} , se obtiene

$$\mathbf{T}_{AB} = \frac{840 \text{ lb}}{21 \text{ ft}}[-(16 \text{ ft})\mathbf{i} + (8 \text{ ft})\mathbf{j} + (11 \text{ ft})\mathbf{k}]$$

$$\mathbf{T}_{AB} = -(640 \text{ lb})\mathbf{i} + (320 \text{ lb})\mathbf{j} + (440 \text{ lb})\mathbf{k}$$

Si se representa con λ_{AC} al vector unitario a lo largo de AC, se obtiene en forma semejante

$$\mathbf{T}_{AC} = T_{AC}\lambda_{AC} = T_{AC}\frac{\overrightarrow{AC}}{AC} = \frac{1\,200 \text{ lb}}{24 \text{ ft}}\overrightarrow{AC}$$

$$\mathbf{T}_{AC} = -(800 \text{ lb})\mathbf{i} + (400 \text{ lb})\mathbf{j} - (800 \text{ lb})\mathbf{k}$$

Resultante de las fuerzas. La resultante \mathbf{R} de las fuerzas ejercidas por los dos cables es

$$\mathbf{R} = \mathbf{T}_{AB} + \mathbf{T}_{AC} = -(1\,440 \text{ lb})\mathbf{i} + (720 \text{ lb})\mathbf{j} - (360 \text{ lb})\mathbf{k}$$

La magnitud y dirección de la resultante se determinan por:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2} = \sqrt{(-1\,440)^2 + (720)^2 + (-360)^2}$$

$$R = 1\,650 \text{ lb} \quad \blacktriangleleft$$

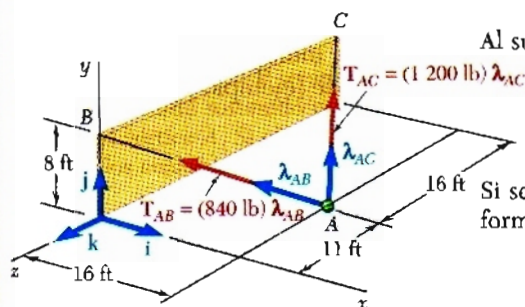
De las ecuaciones (2.33) se obtiene

$$\cos \theta_x = \frac{R_x}{R} = \frac{-1\,440 \text{ lb}}{1\,650 \text{ lb}} \quad \cos \theta_y = \frac{R_y}{R} = \frac{+720 \text{ lb}}{1\,650 \text{ lb}}$$

$$\cos \theta_z = \frac{R_z}{R} = \frac{-360 \text{ lb}}{1\,650 \text{ lb}}$$

Calculando en forma sucesiva cada cociente y su arco coseno, se obtiene

$$\theta_x = 150.8^\circ \quad \theta_y = 64.1^\circ \quad \theta_z = 102.6^\circ \quad \blacktriangleleft$$



RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En esta lección se vio que las *fuerzas en el espacio* pueden ser definidas por su magnitud y su dirección o por las tres componentes rectangulares F_x , F_y y F_z .

A. Cuando una fuerza se define por su magnitud y su dirección, sus componentes rectangulares F_x , F_y y F_z se pueden determinar de la siguiente manera:

Caso 1. Si la dirección de la fuerza \mathbf{F} está definida por los ángulos θ_y y ϕ mostrados en la figura 2.30, las proyecciones de \mathbf{F} a través de estos ángulos o sus complementos proporcionarán las componentes de \mathbf{F} [ecuaciones (2.17)]. Obsérvese que las componentes x y z de \mathbf{F} se obtienen proyectando primero a \mathbf{F} sobre el plano horizontal; entonces, la proyección \mathbf{F}_h obtenida de esta forma se descompone en las componentes \mathbf{F}_x y \mathbf{F}_z (figura 2.30c).

Cuando se resuelven problemas de este tipo, se recomienda dibujar primero la fuerza \mathbf{F} y después su proyección \mathbf{F}_h y sus componentes F_x , F_y y F_z antes de iniciar la parte matemática de la solución.

Caso 2. Si la dirección de la fuerza \mathbf{F} está definida por los ángulos θ_x , θ_y y θ_z que \mathbf{F} forma con los ejes coordenados, cada componente se puede obtener multiplicando la magnitud F de la fuerza por el coseno del ángulo que le corresponde [ejemplo 1]:

$$F_x = F \cos \theta_x \quad F_y = F \cos \theta_y \quad F_z = F \cos \theta_z$$

Caso 3. Si la dirección de la fuerza \mathbf{F} está definida por dos puntos M y N ubicados a lo largo de su línea de acción (figura 2.34), primero se expresa al vector \overline{MN} dibujado desde M hasta N , en términos de sus componentes d_x , d_y y d_z y de los vectores unitarios \mathbf{i} , \mathbf{j} y \mathbf{k} :

$$\overline{MN} = d_x \mathbf{i} + d_y \mathbf{j} + d_z \mathbf{k}$$

Después se determina el vector unitario $\boldsymbol{\lambda}$ a lo largo de la línea de acción de \mathbf{F} dividiendo al vector \overline{MN} entre su magnitud MN . Si se multiplica a $\boldsymbol{\lambda}$ por la magnitud de \mathbf{F} , se obtiene la expresión deseada para \mathbf{F} en términos de sus componentes rectangulares [problema resuelto 2.7]:

$$\mathbf{F} = F\boldsymbol{\lambda} = \frac{F}{d}(d_x \mathbf{i} + d_y \mathbf{j} + d_z \mathbf{k})$$

Cuando se determinan las componentes rectangulares de una fuerza, es conveniente emplear un sistema de notación consistente y con significado. El método utilizado en este texto se ilustra en el problema resuelto 2.8 donde, por ejemplo, la fuerza \mathbf{T}_{AB} actúa desde la estaca A hacia el punto B . Obsérvese que los subíndices han sido ordenados para coincidir con la dirección de la fuerza. Se recomienda adoptar la misma notación ya que le ayudará a identificar al punto 1 (el primer subíndice) y al punto 2 (el segundo subíndice).

Cuando el vector que define la línea de acción de una fuerza se forma, puede pensarse en sus componentes escalares como el número de pasos que debe efectuar, en cada dirección coordenada, para ir desde el punto 1 hasta el punto 2. Es esencial que siempre se recuerde asignarle el signo correcto a cada una de las componentes.

B. Cuando una fuerza está definida por sus componentes rectangulares F_x , F_y y F_z , y se puede obtener su magnitud F así

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$$

Los cosenos directores de la línea de acción de \mathbf{F} se pueden determinar dividiendo las componentes de la fuerza entre F :

$$\cos \theta_x = \frac{F_x}{F} \quad \cos \theta_y = \frac{F_y}{F} \quad \cos \theta_z = \frac{F_z}{F}$$

A partir de los cosenos directores se pueden obtener los ángulos θ_x , θ_y y θ_z que \mathbf{F} forma con los ejes coordenados [ejemplo 2].

C. Para determinar la resultante \mathbf{R} de dos o más fuerzas en el espacio tridimensional, primero se determinan las componentes rectangulares de cada una de las fuerzas utilizando alguno de los procedimientos que se acaban de describir. Con la suma de esas componentes se obtendrán las componentes R_x , R_y y R_z de la resultante. Entonces, la magnitud y la dirección de la resultante se puede obtener como se señaló en los incisos anteriores para el caso de una fuerza \mathbf{F} [problema resuelto 2.8].

Problemas

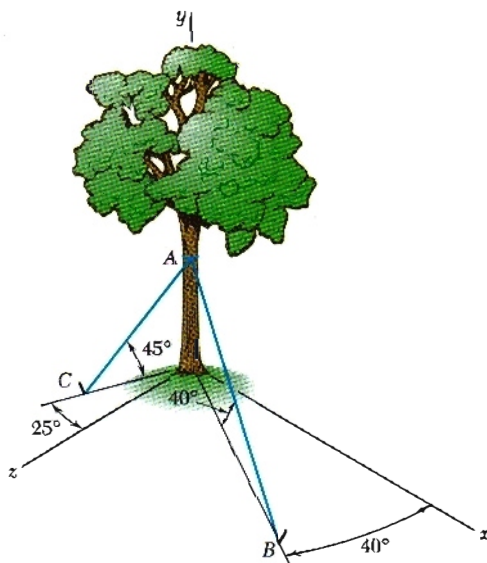


Figura P2.73 y P2.74

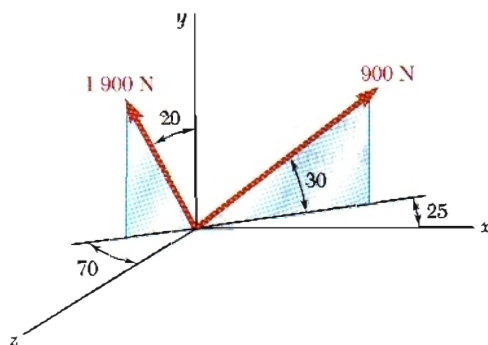


Figura P2.75 y P2.76

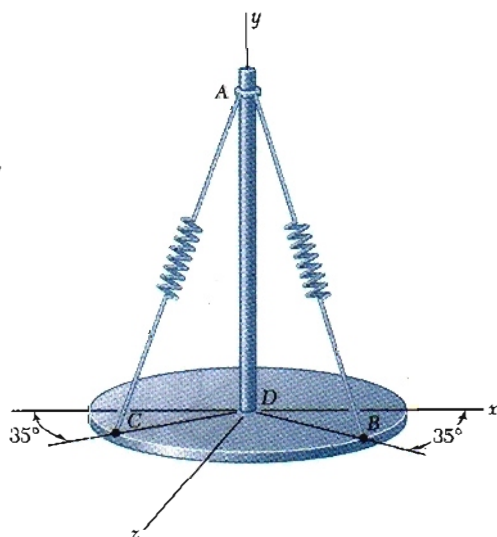


Figura P2.79 y P2.80

2.73 Para estabilizar un árbol arrancado parcialmente durante una tormenta, se le amarran los cables AB y AC a la parte alta del tronco y después se fijan a barras de acero clavadas en el suelo. Si la tensión en el cable AB es de 950 lb, determine *a*) las componentes de la fuerza ejercida por este cable sobre el árbol, *b*) los ángulos θ_x , θ_y y θ_z que forma la fuerza en A con los ejes paralelos a los ejes coordenados.

2.74 Para estabilizar un árbol arrancado parcialmente durante una tormenta, se le amarran los cables AB y AC a la parte alta del tronco y después se fijan a barras de acero clavadas en el suelo. Si la tensión en el cable AC es de 810 lb, determine *a*) las componentes de la fuerza ejercida por este cable sobre el árbol, *b*) los ángulos θ_x , θ_y y θ_z que forma la fuerza en A con los ejes paralelos a los ejes coordenados.

2.75 Determine *a*) las componentes x , y y z de la fuerza de 900 N, *b*) los ángulos θ_x , θ_y y θ_z que forma la fuerza con los ejes coordenados.

2.76 Determine *a*) las componentes x , y y z de la fuerza de 1900 N, *b*) los ángulos θ_x , θ_y y θ_z que forma la fuerza con los ejes coordenados.

2.77 Una pistola se apunta hacia un punto A ubicado 20° al oeste del norte. Si el cañón de la pistola forma un ángulo de 35° con la horizontal y la máxima fuerza del culatazo al disparar es de 180 lb, determine *a*) las componentes x , y y z de dicha fuerza, *b*) los valores de los ángulos θ_x , θ_y y θ_z que definen la dirección de la fuerza del culatazo. (Suponga que x , y y z se dirigen respectivamente al este, hacia arriba y hacia el sur.)

2.78 Resuelva el problema 2.77 suponiendo que el punto A se localiza 25° al norte del oeste y que el cañón de la pistola forma un ángulo de 30° con la horizontal.

2.79 El ángulo entre el resorte AB y el poste DA es de 30° . Si la tensión en el resorte es de 220 N, determine *a*) las componentes x , y y z de la fuerza ejercida por este resorte sobre la placa, *b*) los ángulos θ_x , θ_y y θ_z que forma la fuerza con los ejes coordenados.

2.80 El ángulo entre el resorte AC y el poste DA es de 30° . Si la componente x de la fuerza ejercida por el resorte AC sobre la placa es de 180 N, determine *a*) la tensión en el resorte AC, *b*) los ángulos θ_x , θ_y y θ_z que forma la fuerza ejercida en C con los ejes coordenados.

2.81 Determine la magnitud y la dirección de la fuerza $\mathbf{F} = (65 \text{ N})\mathbf{i} - (80 \text{ N})\mathbf{j} - (200 \text{ N})\mathbf{k}$.

2.82 Determine la magnitud y la dirección de la fuerza $\mathbf{F} = (450 \text{ N})\mathbf{i} + (600 \text{ N})\mathbf{j} - (1800 \text{ N})\mathbf{k}$.

2.83 Una fuerza actúa en el origen de un sistema coordenado en la dirección definida por los ángulos $\theta_x = 43.2^\circ$ y $\theta_z = 83.8^\circ$. Si la componente y de la fuerza es de -50 lb, determine *a)* el ángulo θ_y , *b)* las componentes restantes y la magnitud de la fuerza.

2.84 Una fuerza actúa en el origen de un sistema coordenado en la dirección definida por los ángulos $\theta_x = 113.2^\circ$ y $\theta_y = 78.4^\circ$. Si la componente z de la fuerza es de -35 lb, determine *a)* el ángulo θ_z , *b)* las componentes restantes y la magnitud de la fuerza.

2.85 Una fuerza \mathbf{F} con magnitud de 250 N actúa en el origen de un sistema coordenado. Si $F_x = 80$ N, $\theta_y = 72.4^\circ$ y $F_z > 0$, determine *a)* las componentes F_y y F_z , *b)* los ángulos θ_x y θ_z .

2.86 Una fuerza \mathbf{F} con magnitud de 320 N actúa en el origen de un sistema coordenado. Si $\theta_x = 104.5^\circ$, $F_z = -120$ N y $F_y < 0$, determine *a)* las componentes F_x y F_y , *b)* los ángulos θ_y y θ_z .

2.87 Una barra de acero se dobla para formar un anillo semicircular con 36 in. de radio que está sostenido parcialmente por los cables BD y BE , los cuales se unen al anillo en el punto B . Si la tensión en el cable BD es de 55 lb, determine las componentes de la fuerza ejercida por el cable sobre el soporte colocado en D .

2.88 Una barra de acero se dobla para formar un anillo semicircular con 36 in. de radio que está sostenido parcialmente por los cables BD y BE , los cuales se unen al anillo en el punto B . Si la tensión en el cable BE es de 60 lb, determine las componentes de la fuerza ejercida por el cable sobre el soporte colocado en E .

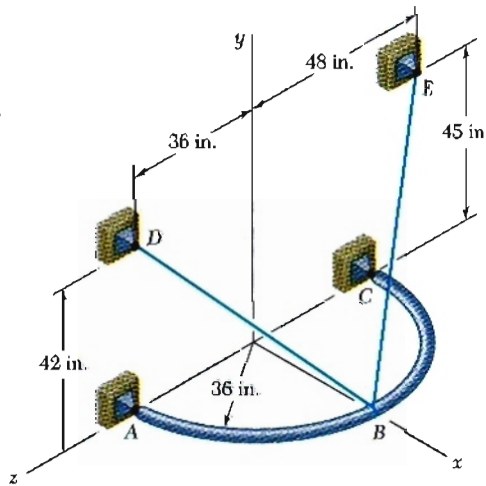


Figura P2.87 y P2.88

2.89 Una torre de transmisión se sostiene por medio de tres alambres anclados con pernos en B , C y D . Si la tensión en el alambre AB es de $2\,100$ N, determine las componentes de la fuerza ejercida por el alambre sobre el perno colocado en B .

2.90 Una torre de transmisión se sostiene mediante tres alambres que están anclados con pernos en B , C y D . Si la tensión en el alambre AD es de $1\,260$ N, determine las componentes de la fuerza ejercida por este alambre sobre el perno colocado en D .

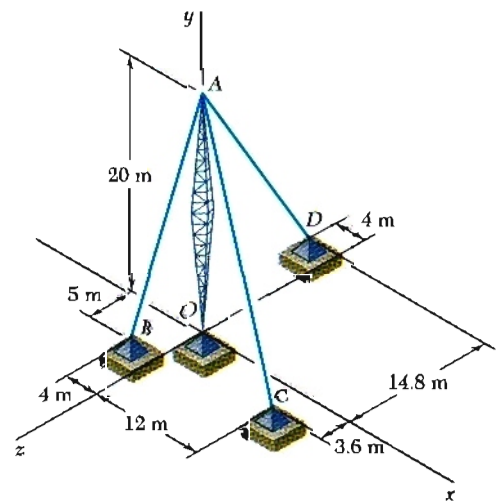


Figura P2.89 y P2.90

2.91 Dos cables BG y BH están unidos al marco ACD como se muestra en la figura. Si la tensión en el cable BG es de 450 N, determine las componentes de la fuerza ejercida por el cable BG sobre el marco en el punto B .

2.92 Dos cables BG y BH están unidos al marco ACD como indica la figura. Si la tensión en el cable BH es de 600 N, determine las componentes de la fuerza ejercida por el cable BH sobre el marco en el punto B .

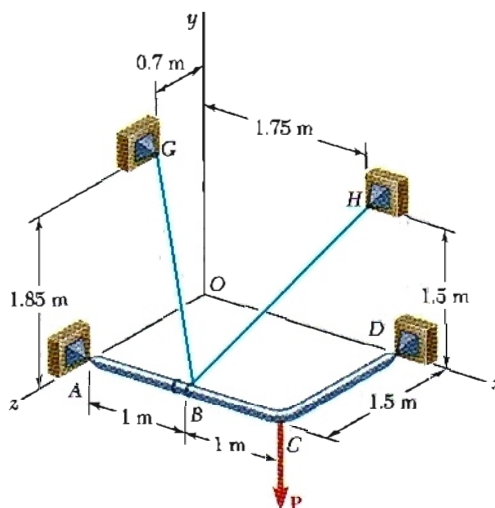


Figura P2.91 y P2.92

2.93 Determine la magnitud y la dirección de la resultante de las dos fuerzas mostradas en la figura, si $P = 4$ kips y $Q = 8$ kips.

2.94 Determine la magnitud y la dirección de la resultante de las dos fuerzas mostradas en la figura, si $P = 6$ kips y $Q = 7$ kips.

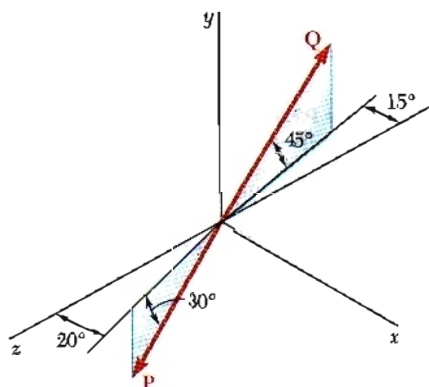


Figura P2.93 y P2.94

2.95 El aguilón OA soporta una carga P y está sostenido por dos cables, según muestra la figura. Si en el cable AB la tensión es de 510 N y en el cable AC es de 765 N, determine la magnitud y la dirección de la resultante de las fuerzas ejercidas en A por los dos cables.

2.96 Suponga que en el problema 2.95 la tensión es de 765 N en el cable AB y de 510 N en el cable AC , y determine la magnitud y la dirección de la resultante de las fuerzas ejercidas en A por los dos cables.

2.97 Para el árbol del problema 2.73, si la tensión en el cable AB es de 760 lb y la resultante de las fuerzas ejercidas en A por los cables AB y AC yace en el plano yz , determine *a*) la tensión en el cable AC , *b*) la magnitud y la dirección de la resultante de las dos fuerzas.

2.98 Para el árbol del problema 2.73, si la tensión en el cable AC es de 980 lb y la resultante de las fuerzas ejercidas en A por los cables AB y AC yace en el plano yz , determine *a*) la tensión en el cable AB , *b*) la magnitud y la dirección de la resultante de las dos fuerzas.

2.99 Para el aguilón del problema 2.95, si $\alpha = 0^\circ$, la tensión en el cable AB es de 600 N, y la resultante de la carga P y las fuerzas ejercidas en A por los dos cables se dirige a lo largo de OA , determine *a*) la tensión en el cable AC , *b*) la magnitud de la carga P .

2.100 Para la torre de transmisión del problema 2.89, determine las tensiones en los cables AB y AD si la tensión en el cable AC es de 1 770 N y la resultante de las fuerzas ejercidas por los tres cables en A debe ser vertical.

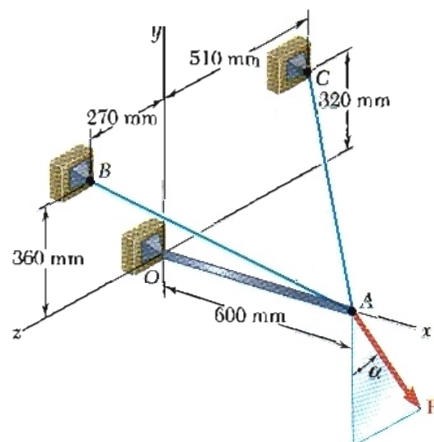


Figura P2.95

2.15. EQUILIBRIO DE UNA PARTÍCULA EN EL ESPACIO

De acuerdo con la definición dada en la sección 2.9, una partícula A está en equilibrio si la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre A es cero. Las componentes R_x , R_y y R_z de la resultante están dadas por las relaciones (2.31); al expresar que las componentes de la resultante son cero, se escribe

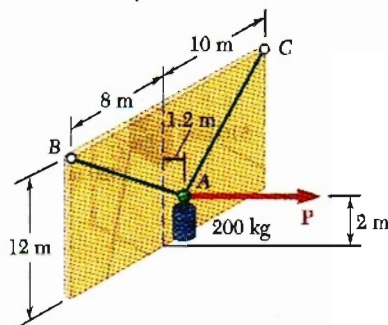
$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma F_y = 0 \quad \Sigma F_z = 0 \quad (2.34)$$

Las ecuaciones (2.34) representan las condiciones necesarias y suficientes para lograr el equilibrio de una partícula en el espacio. Estas ecuaciones pueden usarse para resolver problemas que tratan con el equilibrio de una partícula y en los que intervienen no más de tres incógnitas.

Para resolver tales problemas, se traza un diagrama de cuerpo libre donde se muestre a la partícula en equilibrio y *todas* las fuerzas que actúan sobre ella. Deben escribirse las ecuaciones de equilibrio (2.34) y despejar las tres incógnitas. En los tipos de problemas más comunes, esas incógnitas representan 1) las tres componentes de una sola fuerza o 2) la magnitud de tres fuerzas, cada una con dirección conocida.



Fotografía 2.3 Como la tensión presente en los cuatro cables que sostienen al contenedor de carga no se puede encontrar mediante las tres ecuaciones (2.34), es posible obtener una relación entre las tensiones considerando el equilibrio del gancho.



PROBLEMA RESUELTO 2.9

Un cilindro de 200 kg se sostiene por medio de dos cables AB y AC que se amarran en la parte más alta de una pared vertical. Una fuerza horizontal **P** perpendicular a la pared lo sostiene en la posición mostrada. Determine la magnitud de **P** y la tensión en cada cable.

SOLUCIÓN

Diagrama de cuerpo libre. Se escoge el punto A como cuerpo libre, este punto está sujeto a cuatro fuerzas, tres de las cuales son de magnitud desconocida.

Con la introducción de los vectores unitarios **i**, **j** y **k**, se descompone cada fuerza en sus componentes rectangulares.

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= P\mathbf{i} \\ \mathbf{W} &= -mg\mathbf{j} = -(200 \text{ kg})(9.81 \text{ m/s}^2)\mathbf{j} = -(1962 \text{ N})\mathbf{j} \end{aligned} \quad (1)$$

En el caso de \mathbf{T}_{AB} y \mathbf{T}_{AC} , es necesario determinar primero las componentes y las magnitudes de los vectores \overrightarrow{AB} y \overrightarrow{AC} . Representando con λ_{AB} el vector unitario a lo largo de AB, se escribe

$$\overrightarrow{AB} = -(1.2 \text{ m})\mathbf{i} + (10 \text{ m})\mathbf{j} + (8 \text{ m})\mathbf{k} \quad AB = 12.862 \text{ m}$$

$$\lambda_{AB} = \frac{\overrightarrow{AB}}{AB} = -0.09330\mathbf{i} + 0.7775\mathbf{j} + 0.6220\mathbf{k}$$

$$\mathbf{T}_{AB} = T_{AB}\lambda_{AB} = -0.09330T_{AB}\mathbf{i} + 0.7775T_{AB}\mathbf{j} + 0.6220T_{AB}\mathbf{k} \quad (2)$$

Al representar con λ_{AC} el vector unitario a lo largo de AC, se escribe en forma semejante

$$\overrightarrow{AC} = -(1.2 \text{ m})\mathbf{i} + (10 \text{ m})\mathbf{j} - (10 \text{ m})\mathbf{k} \quad AC = 14.193 \text{ m}$$

$$\lambda_{AC} = \frac{\overrightarrow{AC}}{AC} = -0.08455\mathbf{i} + 0.7046\mathbf{j} - 0.7046\mathbf{k}$$

$$\mathbf{T}_{AC} = T_{AC}\lambda_{AC} = -0.08455T_{AC}\mathbf{i} + 0.7046T_{AC}\mathbf{j} - 0.7046T_{AC}\mathbf{k} \quad (3)$$

Condición de equilibrio. Puesto que A está en equilibrio se debe tener

$$\Sigma \mathbf{F} = 0: \quad \mathbf{T}_{AB} + \mathbf{T}_{AC} + \mathbf{P} + \mathbf{W} = 0$$

o con la sustitución de (1), (2) y (3) para las fuerzas y factorizando **i**, **j** y **k**,

$$\begin{aligned} &(-0.09330T_{AB} - 0.08455T_{AC} + P)\mathbf{i} \\ &+ (0.7775T_{AB} + 0.7046T_{AC} - 1962 \text{ N})\mathbf{j} \\ &+ (0.6220T_{AB} - 0.7046T_{AC})\mathbf{k} = 0 \end{aligned}$$

Al hacer los coeficientes de **i**, **j** y **k** iguales a cero, se escriben las tres ecuaciones escalares que expresan que la suma de las componentes *x*, *y* y *z* de las fuerzas son, respectivamente, iguales a cero.

$$\Sigma F_x = 0: \quad -0.09330T_{AB} - 0.08455T_{AC} + P = 0$$

$$\Sigma F_y = 0: \quad +0.7775T_{AB} + 0.7046T_{AC} - 1962 \text{ N} = 0$$

$$\Sigma F_z = 0: \quad +0.6220T_{AB} - 0.7046T_{AC} = 0$$

Con la solución de estas ecuaciones se obtiene

$$P = 235 \text{ N} \quad T_{AB} = 1402 \text{ N} \quad T_{AC} = 1238 \text{ N} \quad \blacktriangleleft$$

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

Anteriormente se vio que cuando una partícula está en *equilibrio*, la resultante de las fuerzas que actúan sobre la misma debe ser igual a cero. En el caso del equilibrio de una *partícula en el espacio tridimensional*, expresar este hecho proporcionará tres relaciones entre las fuerzas que actúan sobre la partícula. Estas relaciones se pueden utilizar para determinar tres incógnitas, que usualmente son las magnitudes de tres fuerzas.

La solución constará de los siguientes pasos:

1. Dibujar un diagrama de cuerpo libre de la partícula. Este diagrama muestra la partícula y a todas las fuerzas que actúan sobre la misma. En el diagrama se deben indicar tanto las magnitudes de las fuerzas conocidas, como cualquier ángulo o dimensión que defina la dirección de una fuerza. Cualquier magnitud o ángulo desconocido debe ser denotado por un símbolo apropiado. En el diagrama de cuerpo libre no se debe incluir información adicional.

2. Descomponer cada una de las fuerzas en sus componentes rectangulares. Con el método utilizado en la sección anterior, para cada fuerza \mathbf{F} se determina el vector unitario λ , que define la dirección de dicha fuerza y \mathbf{F} se expresa como el producto de su magnitud F y el vector unitario λ . Así se obtiene una expresión con la siguiente forma

$$\mathbf{F} = F\lambda = \frac{F}{d}(d_x\mathbf{i} + d_y\mathbf{j} + d_z\mathbf{k})$$

donde d , d_x , d_y y d_z son dimensiones obtenidas a partir del diagrama de cuerpo libre de la partícula. También mostramos la dirección de \mathbf{F} , que puede definirse en términos de los ángulos θ_y y ϕ . Si se conoce tanto la magnitud como la dirección de una fuerza, entonces F es conocida y la expresión obtenida para \mathbf{F} está totalmente definida; de otra forma, F es una de las tres incógnitas a determinar.

3. Hacer igual a cero a la resultante o suma de las fuerzas que actúan sobre la partícula. Se obtendrá una ecuación vectorial que consta de términos que contienen los vectores unitarios \mathbf{i} , \mathbf{j} o \mathbf{k} . Los términos que contienen el mismo vector unitario se agruparán y dicho vector se factorizará. Para que la ecuación vectorial sea correcta, se deben igualar a cero los coeficientes de cada uno de los vectores unitarios. Esto proporcionará tres ecuaciones escalares que se pueden resolver para un máximo de tres incógnitas [problema resuelto 2.9].

Problemas

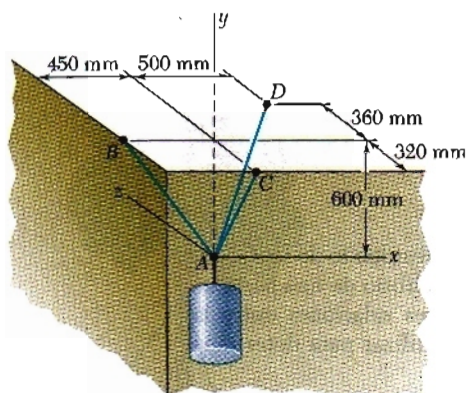


Figura P2.101 y P2.102

2.101 Un contenedor se sostiene por medio de tres cables que están unidos al techo como se muestra en la figura. Determine el peso W del contenedor si la tensión en el cable AB es de 6 kN.

2.102 Un contenedor se sostiene por medio de tres cables que están unidos al techo como se muestra en la figura. Determine el peso W del contenedor si la tensión en el cable AD es de 4.3 kN.

2.103 Tres cables son usados para amarrar el globo que se muestra en la figura. Si la tensión en el cable AB es de 259 N, determine la fuerza vertical P que ejerce el globo en A .

2.104 Tres cables son usados para amarrar el globo que se muestra en la figura. Si la tensión en el cable AC es de 444 N, determine la fuerza vertical P que ejerce el globo en A .

2.105 El montaje de apoyo que se muestra en la figura está atornillado al sitio en B , C y D y soporta en A una fuerza P dirigida hacia abajo. Si las fuerzas presentes en los elementos AB , AC y AD están dirigidas a lo largo de los elementos respectivos, y la fuerza en el elemento AB es de 29.2 lb, determine la magnitud de P .

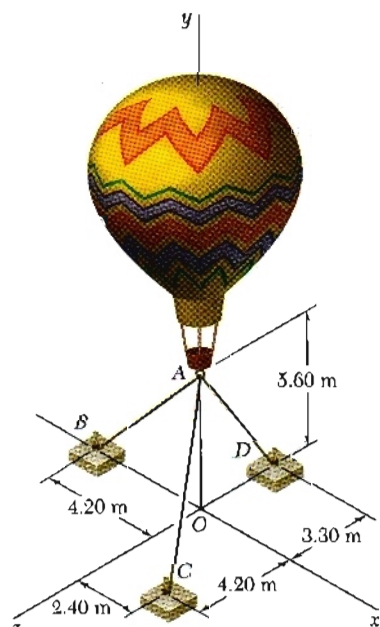


Figura P2.103 y P2.104

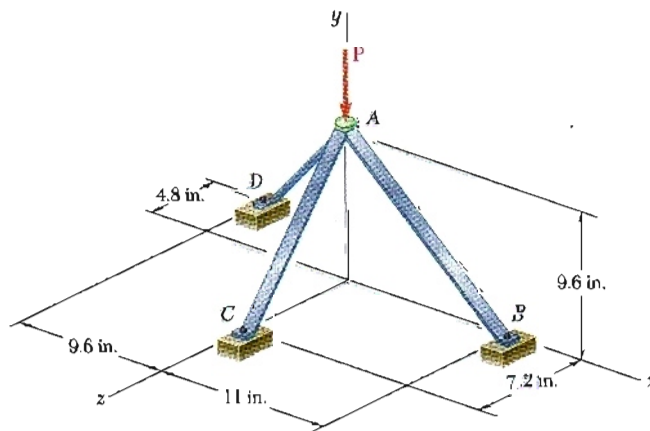


Figura P2.105 y P2.106

2.106 El montaje de apoyo que se muestra en la figura está atornillado al sitio en B , C y D y soporta en A una fuerza P dirigida hacia abajo. Si las fuerzas presentes en los elementos AB , AC y AD están dirigidas a lo largo de los elementos respectivos y $P = 45$ lb, determine las fuerzas presentes en los elementos.

2.107 Una torre de transmisión se sostiene por medio de tres alambres que están unidos a una punta colocada en A y se anclan mediante pernos en B , C y D . Si la tensión en el alambre AB es de 3.6 kN, determine la fuerza vertical P ejercida por la torre sobre la punta puesta en A .

2.108 Una torre de transmisión se sostiene por medio de tres alambres que están unidos a una punta colocada en A y se anclan mediante pernos en B , C y D . Si la tensión en el alambre AC es de 2.6 kN, determine la fuerza vertical P ejercida por la torre sobre la punta puesta en A .

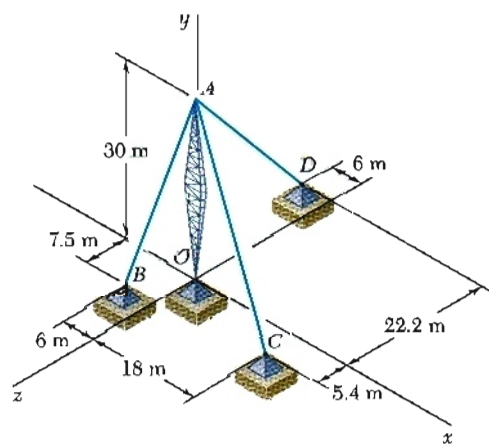


Figura P2.107 y P2.108

2.109 Una carga de madera de 320 lb se levanta usando un cabestro de tres ramas. Si en el instante mostrado la madera se encuentra en reposo, determine la tensión en cada rama del cabestro.

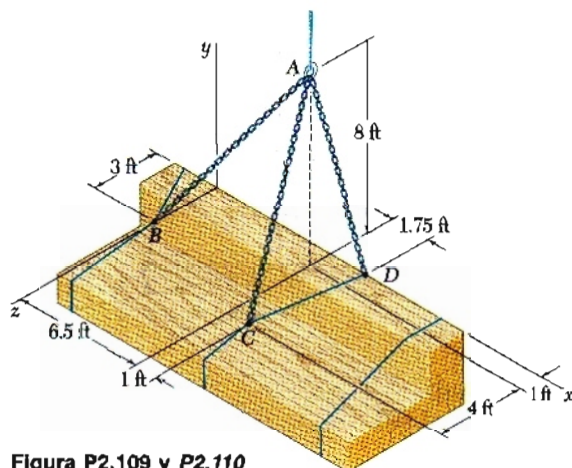


Figura P2.109 y P2.110

2.110 Una carga de madera se levanta usando un cabestro de tres ramas. Si en el instante mostrado la madera se encuentra en reposo y la tensión en la rama AD es de 220 lb, determine el peso de la madera.

2.111 Una fuerza P se aplica sobre un cono uniforme como indica la figura; el cono está sostenido por tres cuerdas cuyas líneas de acción pasan a través del vértice A. Si $P = 0$ y la tensión en la cuerda BE es de 0.2 lb, determine el peso W del cono.

2.112 Una fuerza P se aplica sobre un cono uniforme como indica la figura; el cono está sostenido por tres cuerdas cuyas líneas de acción pasan a través del vértice A. Si el cono pesa 1.6 lb, determine el rango de valores de P para los cuales la cuerda CF está tensa.

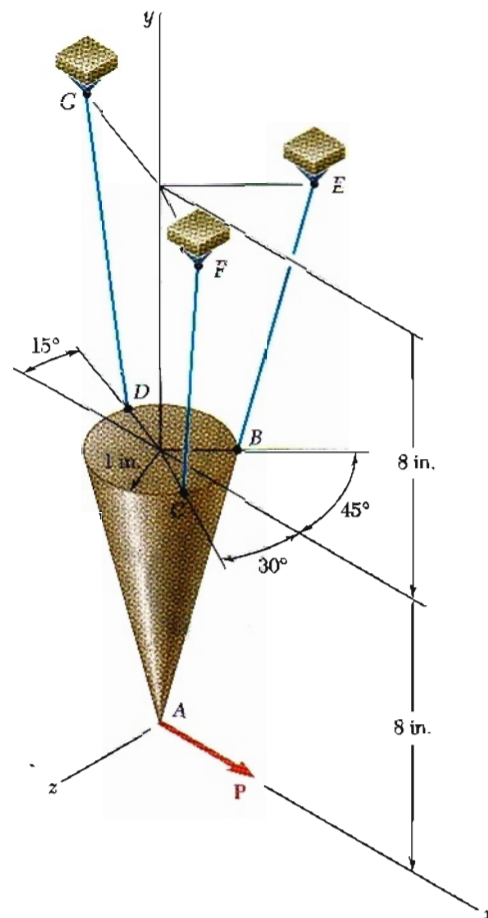


Figura P2.111 y P2.112

2.113 Una placa triangular de 16 kg se sostiene mediante tres cables como indica la figura. Si $a = 150$ mm, determine la tensión presente en cada cable.

2.114 Una placa triangular de 16 kg se sostiene mediante tres cables como indica la figura. Si $a = 200$ mm, determine la tensión en cada cable.

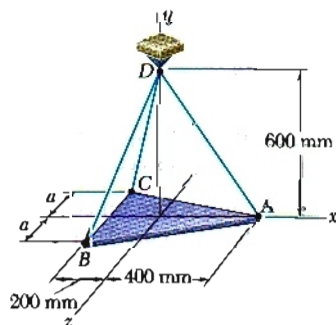


Figura P2.113 y P2.114

2.115 Una torre de transmisión se sostiene por medio de tres alambres que están unidos a una punta colocada en A y se anclan mediante pernos en B, C y D. Si la torre ejerce sobre la punta una fuerza vertical hacia arriba de 8 kN, determine la tensión presente en cada alambre.

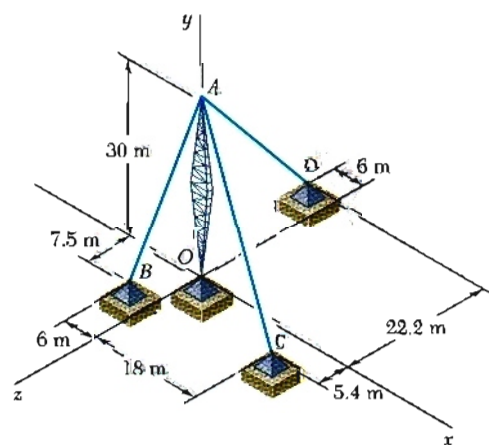


Figura P2.115

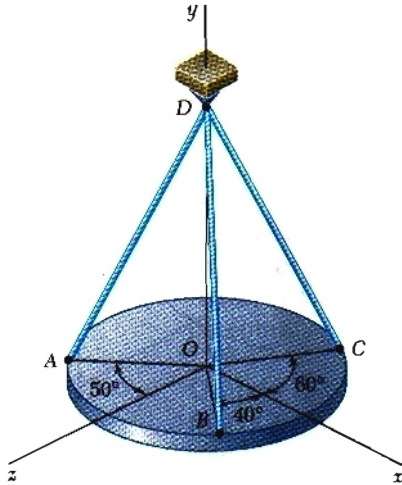


Figura P2.117

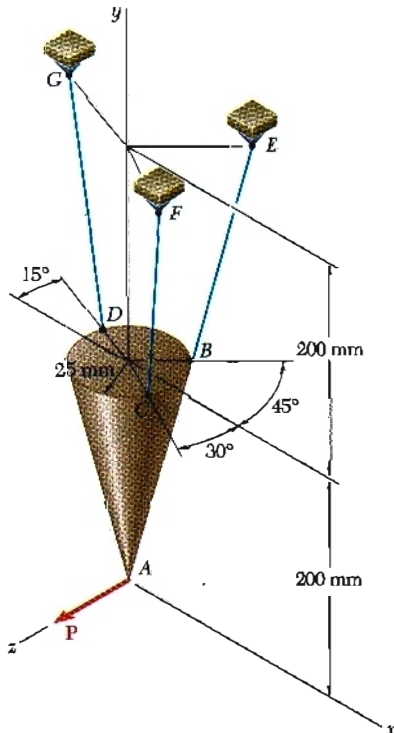


Figura P2.121 y P2.122

2.116 Un aguilón de grúa se sostiene mediante los cables AC y AD. Un trabajador levanta un bloque de 20 kg jalando una cuerda que pasa por la polea colocada en A. Si el aguilón AB ejerce una fuerza en A que está dirigida de B hacia A, determine dicha fuerza y la fuerza ejercida en cada uno de los dos cables.

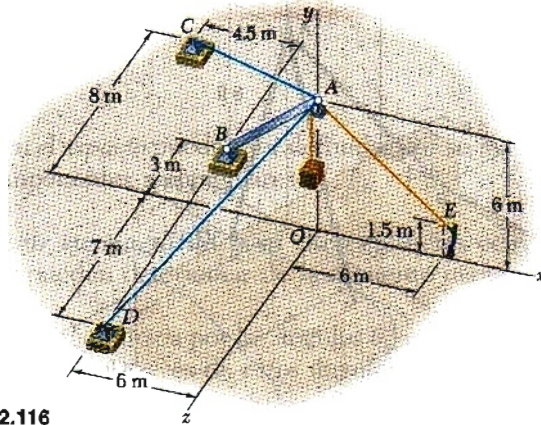


Figura P2.116

2.117 Una placa circular horizontal con peso de 62 lb está suspendida por tres alambres que forman ángulos de 30° con respecto a la vertical y se encuentran unidos a un soporte en D. Determine la tensión presente en cada alambre.

2.118 Para el cono del problema 2.112, determine el rango de valores de P en los cuales la cuerda DG queda tensa cuando P se orienta en la dirección $-x$.

2.119 Un hombre de 175 lb utiliza dos cuerdas AB y AC para tratar de moverse sobre una superficie congelada y resbaladiza. Si la fuerza ejercida sobre el hombre por la superficie congelada es perpendicular a dicha superficie, determine la tensión presente en cada cuerda.

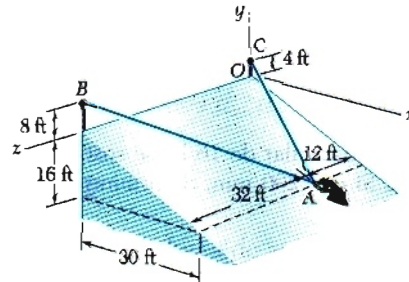


Figura P2.119

2.120 Resuelva el problema 2.119 suponiendo que el hombre situado en A es ayudado por un amigo, quien jala hacia él con una fuerza $\mathbf{P} = -(45 \text{ lb})\mathbf{k}$.

2.121 Una fuerza P se aplica sobre un cono uniforme como indica la figura; el cono está sostenido por tres cuerdas cuyas líneas de acción pasan a través del vértice A. Si el cono pesa 10.5 N y $P = 0$, determine la tensión presente en cada cuerda.

2.122 Una fuerza P se aplica sobre un cono uniforme como indica la figura; el cono está sostenido por tres cuerdas cuyas líneas de acción pasan a través del vértice A. Si el cono pesa 10.5 N y $P = 0.5 \text{ N}$, determine la tensión en cada cuerda.

2.123 Los escaladores situados en A y B han pasado una cuerda ADB a través de un anillo unido al paquete en D, pretenden bajar el paquete, con

peso W , al escalador que se encuentra en C . El escalador en C está 64 ft por debajo de A y guía el paquete usando la cuerda CD . Si en el instante mostrado en la figura el paquete está en reposo y la tensión en la cuerda CD es de 17 lb, determine la tensión presente en la cuerda ADB y el peso del paquete. (Sugerencia: Considere que la tensión es la misma en ambas porciones de la cuerda ADB .)

2.124 Los escaladores situados en A y B han pasado una cuerda ADB a través de un anillo unido al paquete en D , pretenden bajar el paquete, con peso W , al escalador que se encuentra en C . El escalador en C está 64 ft por debajo de A y guía el paquete usando la cuerda CD . Si $W = 120$ lb y en el instante mostrado en la figura el paquete está en reposo, determine la tensión en cada cuerda. (Sugerencia: Considere que la tensión es la misma en ambas porciones de la cuerda ADB .)

2.125 Una pieza de maquinaria de peso W está sostenida temporalmente por los cables AB , AC y ADE . El cable ADE está unido al anillo en A , pasa por la polea en D , y regresa al anillo para unirse después al soporte en E . Si $W = 1\,400$ N, determine la tensión en cada cable. (Sugerencia: La tensión es la misma en todas las porciones del cable ADE .)

2.126 Una pieza de maquinaria de peso W está sostenida temporalmente por los cables AB , AC y ADE . El cable ADE está unido al anillo en A , pasa por la polea en D , y regresa al anillo para unirse después al soporte en E . Si la tensión en el cable AB es de 300 N, determine a) la tensión en AC , b) la tensión en ADE y c) el peso W . (Sugerencia: La tensión es la misma en todos los tramos del cable ADE .)

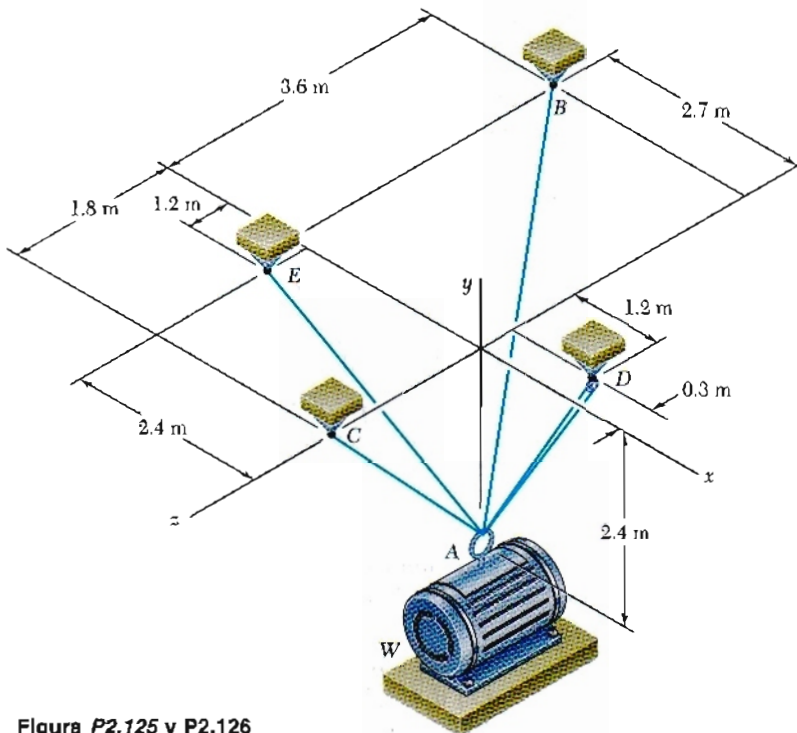


Figura P2.125 y P2.126

2.127 Los collarines A y B unidos por medio de un alambre de 1 m de largo pueden deslizarse libremente sin fricción sobre las barras. Si una fuerza $\mathbf{P} = (680 \text{ N})\mathbf{j}$ se aplica en A , determine a) la tensión en el alambre cuando $y = 300$ mm, b) la magnitud de la fuerza Q requerida para mantener el equilibrio del sistema.

2.128 Resuelva el problema 2.127 suponiendo que $y = 550$ mm.

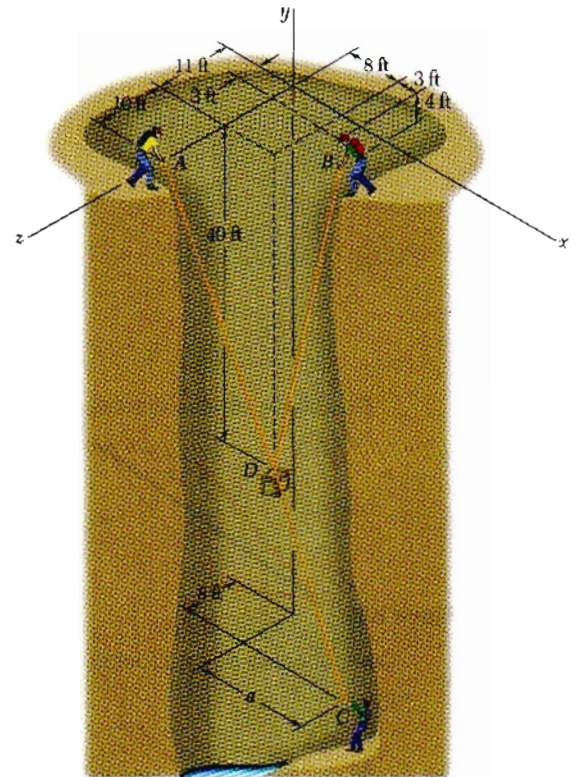


Figura P2.123 y P2.124

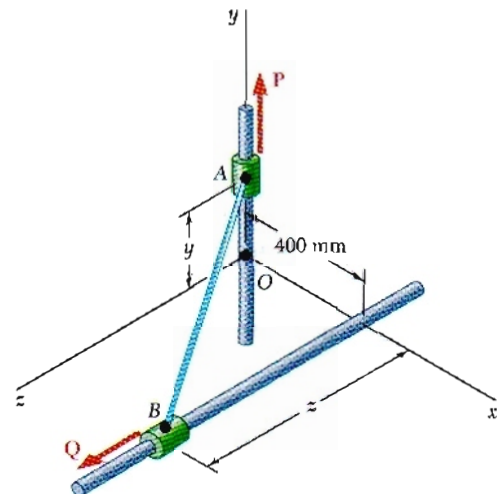


Figura P2.127

REPASO Y RESUMEN DEL CAPÍTULO 2

En este capítulo se estudió el efecto de fuerzas sobre partículas, es decir, sobre cuerpos de forma y tamaño tales que todas las fuerzas que actúan sobre ellos se puede suponer que se aplican en el mismo punto.

Las fuerzas son *cantidades vectoriales* que se caracterizan por un *punto de aplicación*; una *magnitud* y una *dirección*, y se suman de acuerdo con la *ley del paralelogramo* (figura 2.35). La magnitud y dirección de la resultante \mathbf{R} de dos fuerzas \mathbf{P} y \mathbf{Q} se pueden determinar ya sea gráficamente o por trigonometría, utilizando sucesivamente la ley de los cosenos y la ley de los senos (problema resuelto 2.1).

Cualquier fuerza dada que actúe sobre una partícula puede descomponerse en dos o más *componentes*, es decir, se puede reemplazar por dos o más fuerzas que tengan el mismo efecto sobre la partícula. Se puede descomponer una fuerza \mathbf{F} en dos componentes \mathbf{P} y \mathbf{Q} al dibujar un paralelogramo que tenga a \mathbf{F} por su diagonal; entonces, las componentes \mathbf{P} y \mathbf{Q} son representadas por los dos lados adyacentes del paralelogramo (figura 2.36) y se pueden determinar ya sea en gráficas o por trigonometría (sección 2.6).

Se dice que una fuerza \mathbf{F} se ha dividido en dos *componentes rectangulares* si sus componentes F_x y F_y son perpendiculares entre sí y se dirigen a lo largo de los ejes coordenados (figura 2.37). Al introducir los *vectores unitarios* \mathbf{i} y \mathbf{j} a lo largo de los ejes x y y , respectivamente, se escribe (sección 2.7)

$$\mathbf{F}_x = F_x \mathbf{i} \quad \mathbf{F}_y = F_y \mathbf{j} \quad (2.6)$$

y

$$\mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} \quad (2.7)$$

donde F_x y F_y son las *componentes escalares* de \mathbf{F} . Estas componentes, que pueden ser positivas o negativas, se definen por las relaciones

$$F_x = F \cos \theta \quad F_y = F \sin \theta \quad (2.8)$$

Cuando se dan las componentes rectangulares F_x y F_y de una fuerza \mathbf{F} , el ángulo θ que define la dirección de la fuerza se puede obtener al escribir

$$\tan \theta = \frac{F_y}{F_x} \quad (2.9)$$

La magnitud F de la fuerza se puede obtener al resolver una de las ecuaciones (2.8) o al aplicar el teorema de Pitágoras y escribir

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \quad (2.10)$$

Cuando *tres o más fuerzas coplanarias* actúan sobre una partícula, las componentes rectangulares de su resultante \mathbf{R} se pueden

Resultante de dos fuerzas

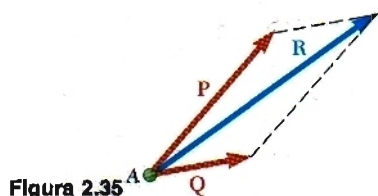


Figura 2.35

Componentes de una fuerza

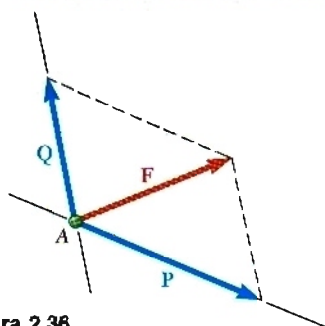


Figura 2.36

Componentes rectangulares.
Vectores unitarios

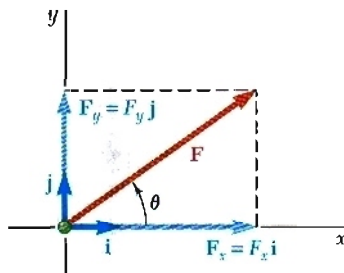


Figura 2.37

Resultantes de varias fuerzas
coplanarias

obtener al sumar en forma algebraica las componentes correspondientes de las fuerzas dadas (sección 2.8). Se tiene

$$R_x = \sum F_x \quad R_y = \sum F_y \quad (2.13)$$

La magnitud y dirección de \mathbf{R} se pueden determinar entonces por relaciones similares a las ecuaciones (2.9) y (2.10) (problema resuelto 2.3).

Una fuerza \mathbf{F} en un *espacio tridimensional* se puede descomponer en componentes rectangulares F_x , F_y y F_z (sección 2.12). Al simbolizar por medio de θ_x , θ_y y θ_z , respectivamente, los ángulos que \mathbf{F} forma con los ejes x , y y z (figura 2.38), se tiene

$$F_x = F \cos \theta_x \quad F_y = F \cos \theta_y \quad F_z = F \cos \theta_z \quad (2.19)$$

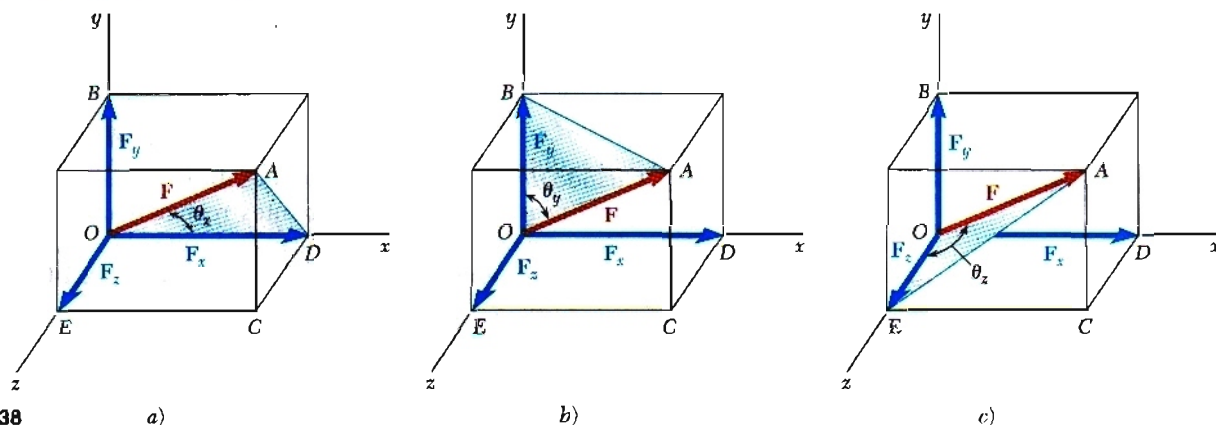


Figura 2.38

Fuerzas en el espacio

Los cosenos de θ_x , θ_y y θ_z se conocen como los *cosenos directores* (direccionales) de la fuerza \mathbf{F} . Con la introducción de los vectores unitarios \mathbf{i} , \mathbf{j} y \mathbf{k} a lo largo de los ejes coordenados, se escribe

$$\mathbf{F} = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k} \quad (2.20)$$

o

$$\mathbf{F} = F(\cos \theta_x \mathbf{i} + \cos \theta_y \mathbf{j} + \cos \theta_z \mathbf{k}) \quad (2.21)$$

lo que demuestra (figura 2.39) que \mathbf{F} es el producto de su magnitud F y del vector unitario

$$\boldsymbol{\lambda} = \cos \theta_x \mathbf{i} + \cos \theta_y \mathbf{j} + \cos \theta_z \mathbf{k}$$

Puesto que la magnitud de $\boldsymbol{\lambda}$ es igual a la unidad, se tiene que

$$\cos^2 \theta_x + \cos^2 \theta_y + \cos^2 \theta_z = 1 \quad (2.24)$$

Cuando las componentes rectangulares F_x , F_y y F_z de una fuerza \mathbf{F} se proporcionan, la magnitud F de la fuerza se encuentra al escribir

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2} \quad (2.18)$$

y los cosenos directores de \mathbf{F} se obtienen a partir de las ecuaciones (2.19). Se tiene

$$\cos \theta_x = \frac{F_x}{F} \quad \cos \theta_y = \frac{F_y}{F} \quad \cos \theta_z = \frac{F_z}{F} \quad (2.25)$$

Cuando una fuerza \mathbf{F} se define en un espacio tridimensional por medio de su magnitud F y de dos puntos M y N sobre su línea

Cosenos directores

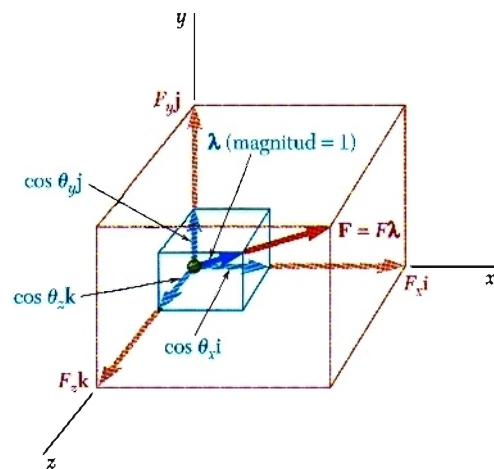


Figura 2.39

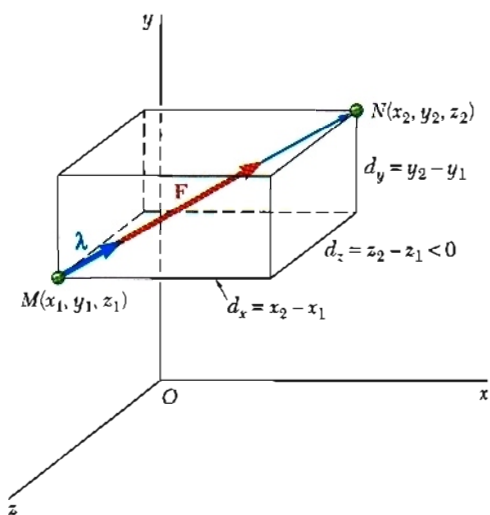


Figura 2.40

Resultante de fuerzas en el espacio

Equilibrio de una partícula

Diagrama de cuerpo libre

Equilibrio en el espacio

de acción (sección 2.13), sus componentes rectangulares se pueden obtener de la siguiente manera: primero se expresa el vector \overline{MN} que une los puntos M y N en términos de sus componentes d_x , d_y y d_z (figura 2.40); se escribe

$$\overline{MN} = d_x \mathbf{i} + d_y \mathbf{j} + d_z \mathbf{k} \quad (2.26)$$

Después se determina el vector unitario λ a lo largo de la línea de acción de \mathbf{F} al dividir \overline{MN} entre su magnitud $MN = d$:

$$\lambda = \frac{\overline{MN}}{MN} = \frac{1}{d}(d_x \mathbf{i} + d_y \mathbf{j} + d_z \mathbf{k}) \quad (2.27)$$

Recordando que \mathbf{F} es igual al producto de F y λ , se tiene

$$\mathbf{F} = F\lambda = \frac{F}{d}(d_x \mathbf{i} + d_y \mathbf{j} + d_z \mathbf{k}) \quad (2.28)$$

de lo cual se desprende (problemas resueltos 2.7 y 2.8) que las componentes escalares de \mathbf{F} son, respectivamente,

$$F_x = \frac{Fd_x}{d} \quad F_y = \frac{Fd_y}{d} \quad F_z = \frac{Fd_z}{d} \quad (2.29)$$

Cuando *dos o más* fuerzas actúan sobre una partícula en el *espacio tridimensional*, las componentes rectangulares de su resultante \mathbf{R} se pueden obtener al sumar en forma algebraica las componentes correspondientes de las fuerzas (sección 2.14). Se tiene

$$R_x = \Sigma F_x \quad R_y = \Sigma F_y \quad R_z = \Sigma F_z \quad (2.31)$$

La magnitud y dirección de \mathbf{R} se pueden determinar entonces a partir de relaciones similares a las ecuaciones (2.18) y (2.25) (véase problema resuelto 2.8).

Se dice que una partícula está en *equilibrio* cuando la resultante de todas las fuerzas que actúan sobre ella es cero (sección 2.9). La partícula entonces permanecerá en reposo (si originalmente se encuentra en reposo) o se moverá con velocidad constante en una línea recta (si se encontraba originalmente en movimiento) (sección 2.10).

Para resolver un problema que se refiera a una partícula en equilibrio, primero se deberá dibujar un *diagrama de cuerpo libre* de la partícula que muestre todas las fuerzas que actúan sobre ella (sección 2.11). Si *sólo actúan tres fuerzas coplanares* sobre la partícula, se puede dibujar un *triángulo de fuerzas* para expresar que la partícula se encuentra en equilibrio. Este triángulo se puede resolver gráficamente o por trigonometría para no más de dos incógnitas (véase problema resuelto 2.4). Si se incluyen *más de tres fuerzas coplanares*, se deberán utilizar y resolver las ecuaciones de equilibrio

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma F_y = 0 \quad (2.15)$$

Estas ecuaciones pueden ser usadas para no más de dos incógnitas (problema resuelto 2.6).

Cuando una partícula está en *equilibrio en el espacio tridimensional* (sección 2.15), deberán usarse y resolverse las tres ecuaciones de equilibrio

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma F_y = 0 \quad \Sigma F_z = 0 \quad (2.34)$$

Estas ecuaciones se pueden resolver para no más de tres incógnitas (véase problema resuelto 2.9).

Problemas de repaso

2.129 Se aplican dos fuerzas en el gancho mostrado en la figura. Si la magnitud de P es de 14 lb determine, por trigonometría, *a*) el ángulo α requerido si la resultante R de las dos fuerzas aplicadas en el gancho debe ser horizontal, *b*) la magnitud correspondiente de R .

2.130 Determine las componentes x y y de cada una de las fuerzas que se muestran en la figura.

2.131 El alambre atirantado BD ejerce sobre el poste telefónico AC una fuerza P dirigida a lo largo de BD . Si P tiene una componente de 450 N a lo largo de la línea AC , determine *a*) la magnitud de la fuerza P , *b*) su componente en una dirección perpendicular a AC .

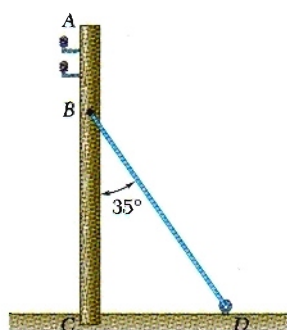


Figura P2.131

2.132 Sabiendo que $\alpha = 25^\circ$, determine la tensión en *a*) el cable AC , *b*) la cuerda BC .

2.133 La cabina de un teleférico se desliza a velocidad constante por el cable DE y se sostiene mediante un conjunto de poleas, las cuales pueden rodar libremente sobre el cable de soporte ACB . Sabiendo que $\alpha = 42^\circ$ y $\beta = 32^\circ$, que la tensión en el cable DE es de 20 kN, y que la tensión en el cable DF es insignificante, determine *a*) el peso combinado de la cabina, su sistema de soporte y sus pasajeros, *b*) la tensión en el cable de soporte ACB .

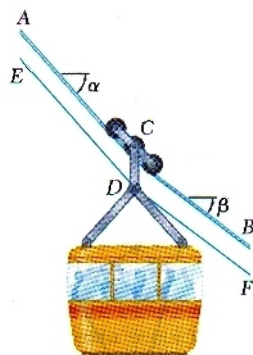


Figura P2.133

2.134 Una carga de 350 lb está sostenida mediante el arreglo de cuerdas y poleas mostrado en la figura. Si $\beta = 25^\circ$, determine la magnitud y la dirección de la fuerza P que debe aplicarse en el extremo libre de la cuerda para mantener al sistema en equilibrio. (Vea la sugerencia del problema 2.68.)

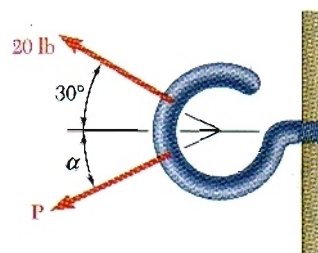


Figura P2.129

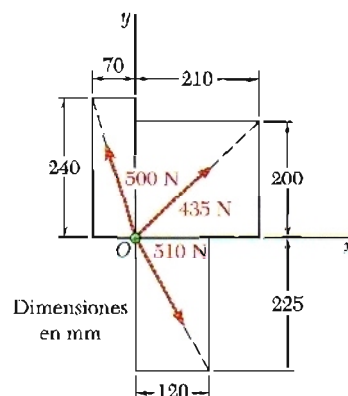


Figura P2.130

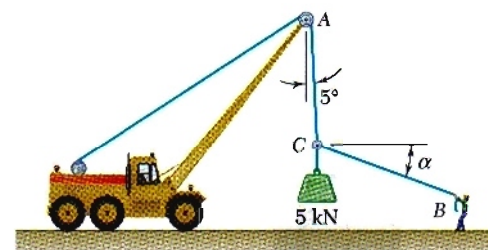


Figura P2.132

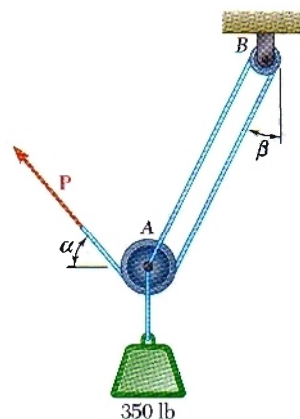


Figura P2.134

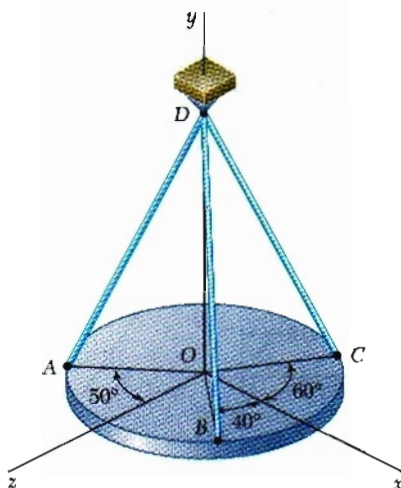


Figura P2.135

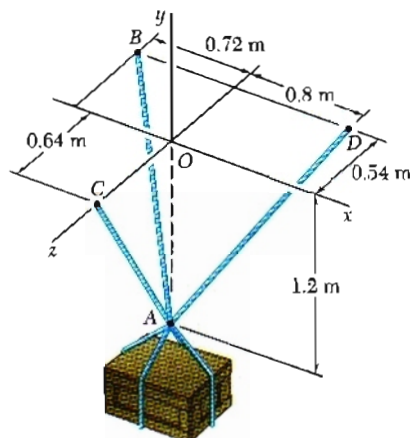
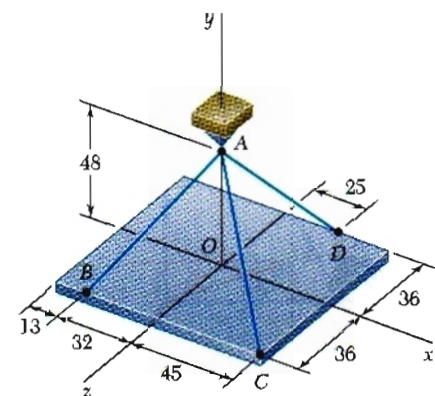


Figura P2.138



Dimensiones en pulgadas

Figura P2.139

2.135 Una placa circular horizontal se sostiene mediante tres alambres que forman ángulos de 30° con respecto a la vertical y se encuentran unidos a un soporte ubicado en el punto D . Si la componente x de la fuerza ejercida por el alambre AD sobre la placa es de 220.6 N , determine *a*) la tensión en el alambre AD , *b*) los ángulos θ_x , θ_y y θ_z que forma la fuerza ejercida en A con los ejes coordenados.

2.136 Una fuerza \mathbf{F} con magnitud de 600 lb actúa en el origen de un sistema coordenado. Si $F_x = 200 \text{ lb}$, $\theta_z = 136.8^\circ$ y $F_y < 0$, determine *a*) las componentes F_y y F_z , *b*) los ángulos θ_x y θ_y .

2.137 Encuentre la magnitud y la dirección de la resultante de las dos fuerzas que se muestran en la figura, sabiendo que $P = 500 \text{ lb}$ y $Q = 600 \text{ lb}$.

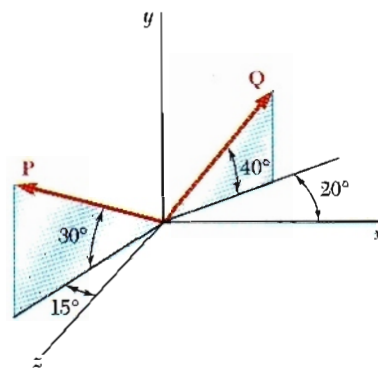


Figura P2.137

2.138 La caja de madera que se muestra en la figura se sostiene por medio de tres cables. Si la tensión en el cable AB es de 3 kN , determine el peso de la caja.

2.139 Una placa rectangular está sostenida por tres cables como se muestra en la figura. Si la tensión en el cable AD es de 120 lb , determine el peso de la placa.

2.140 Un contenedor de peso W está suspendido del aro A . El cable BAC pasa por el aro y se une a los soportes fijos en B y C . Dos fuerzas $\mathbf{P} = P\mathbf{i}$ y $\mathbf{Q} = Q\mathbf{k}$ se aplican en el aro para mantener al recipiente en la posición mostrada. Si $W = 1\,200 \text{ N}$, determine P y Q . (Sugerencia: Considere que la tensión es la misma en ambos tramos del cable BAC .)

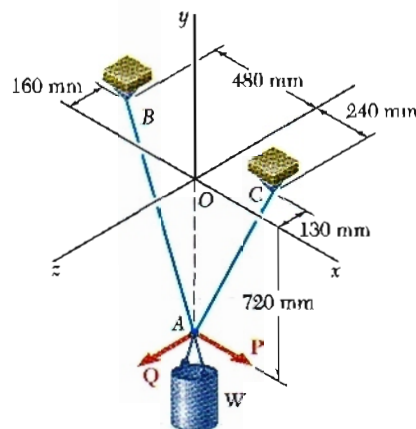


Figura P2.140

Problemas de computadora

2.C1 Con el empleo de software, determine la magnitud y la dirección de la resultante de n fuerzas coplanarias aplicadas en el punto A. Utilice este software para resolver los problemas 2.31, 2.32, 2.33 y 2.34.

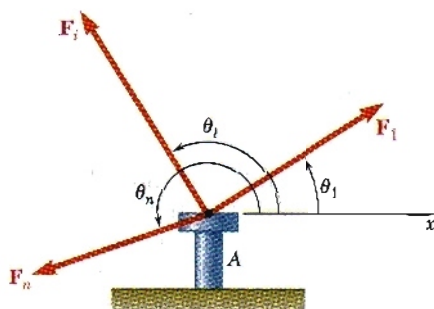


Figura P2.C1

2.C2 Un trabajador planea subir una cubeta de pintura de 5 galones y 60 lb de peso atando una cuerda al andamio en A, y después pasando la cuerda a través del asa de la cubeta en B y por la polea en C; a) grafique la tensión en la cuerda como una función de la altura y para $2 \text{ ft} \leq y \leq 18 \text{ ft}$; b) evalúe el plan del trabajador.

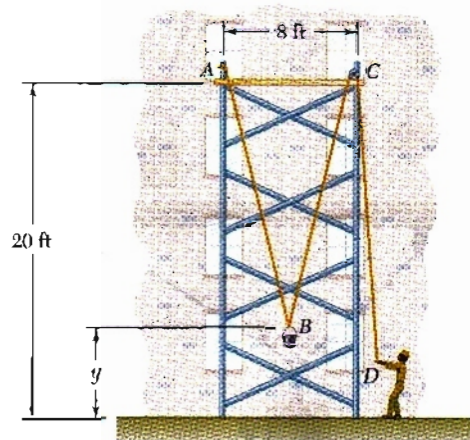


Figura P2.C2

2.C3 El collar A puede deslizarse libremente y sin fricción sobre la barra horizontal que se muestra en la figura. El resorte conectado al collar tiene una constante k y no sufre deformación cuando el collar está directamente abajo del soporte B. Expresé, en términos de k y la distancia c , la magnitud de la fuerza P requerida para mantener el equilibrio del sistema. Grafique P como una función de c para los valores de c entre 0 y 600 mm cuando: a) $k = 2 \text{ N/mm}$, b) $k = 3 \text{ N/mm}$ y c) $k = 4 \text{ N/mm}$.

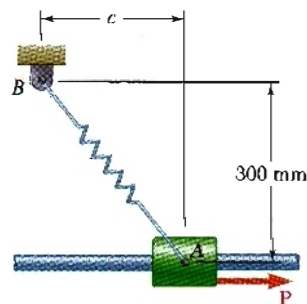


Figura P2.C3

2.C4 Una carga P está sostenida por dos cables, como se muestra en la figura. Determine, empleando software, la tensión en cada cable como una función de P y θ . Para los siguientes tres conjuntos de valores numéricos grafique las tensiones para los valores de θ que se encuentran desde $\theta_1 = \beta - 90^\circ$ hasta $\theta_2 = 90^\circ$ y a partir de las gráficas determine a) el valor de θ para el cual la tensión en los dos cables es mínima y b) el valor correspondiente de la tensión.

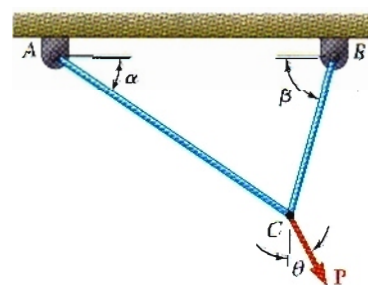


Figura P2.C4

- (1) $\alpha = 35^\circ$, $\beta = 75^\circ$, $P = 1.6 \text{ kN}$
- (2) $\alpha = 50^\circ$, $\beta = 30^\circ$, $P = 2.4 \text{ kN}$
- (3) $\alpha = 40^\circ$, $\beta = 60^\circ$, $P = 1.0 \text{ kN}$

2.C5 Los cables AC y BC se amarran juntos en C y se cargan como se muestra en la figura. Se sabe que $P = 100$ lb, a) exprese la tensión en cada cable como una función de θ ; b) grafique la tensión en cada cable para $0 \leq \theta \leq 90^\circ$, y c) a partir de la gráfica obtenida en el inciso a), determine el valor mínimo de θ para el cual ambos cables se mantienen en tensión.

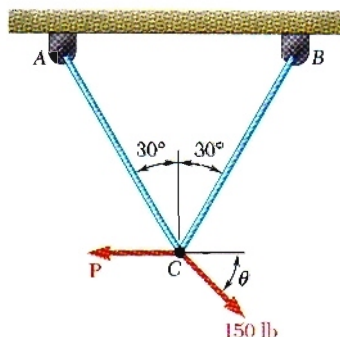


Figura P2.C5

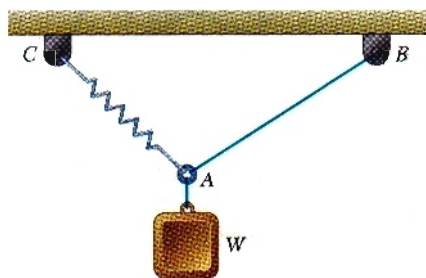


Figura P2.C6

2.C6 Un recipiente de peso W está sostenido del aro A al cual están conectados el cable AB , de 5 m de longitud y el resorte AC . La constante del resorte es de 100 N/m, y su longitud sin estiramiento es de 3 m. Determine la tensión en el cable cuando a) $W = 120$ N y b) $W = 160$ N.

2.C7 Un acróbata se encuentra caminando sobre una cuerda tensa de longitud $L = 80.3$ ft que está unida a los soportes A y B , los cuales se encuentran separados por una distancia de 80 ft. El peso combinado del acróbata y su garrocha de balance es de 200 lb y la fricción entre sus zapatos y la cuerda son suficientes para prevenir el deslizamiento. Despreciando el peso y cualquier tipo de deformación elástica de la cuerda, úsese software para calcular la deflexión y y la tensión en las porciones AC y BC de la cuerda para los valores de x comprendidos entre 0.5 y 40 ft usando incrementos de 0.5 ft. De los resultados obtenidos, determine a) la deflexión máxima de la cuerda, b) la tensión máxima en la cuerda, y c) los valores mínimos de la tensión en las porciones AC y BC de la cuerda.

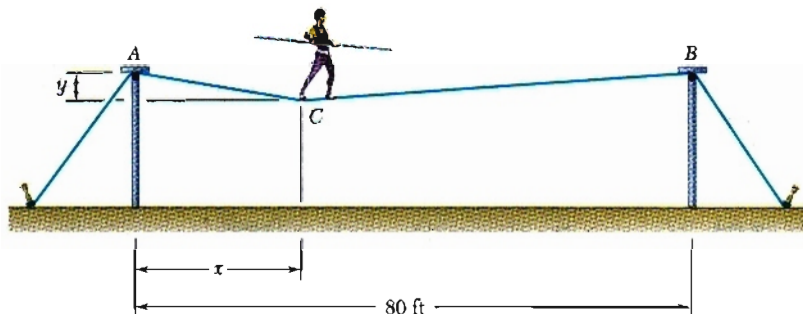


Figura P2.C7

2.C8 La torre de transmisión que se muestra en la figura está sostenida por tres cables, los cuales están conectados a una articulación en A y anclados en los puntos B , C y D . El cable AD tiene 21 m de longitud y la tensión en el mismo es de 20 kN; a) exprese las componentes x , y y z de la fuerza

ejercida por el cable AD sobre el ancla en D y los ángulos θ_x , θ_y y θ_z correspondientes en términos de α y β) grafique las componentes de la fuerza y los ángulos θ_x , θ_y y θ_z para $0 \leq \alpha \leq 60^\circ$.

2.C9 Una torre está sostenida por los cables AB y AC . Un trabajador amarra una cuerda de 12 m de longitud a la torre en A y ejerce una fuerza constante de 160 N sobre la cuerda; a) exprese la tensión en cada cable como una función de θ si la resultante de las tensiones en los cables y en la cuerda está dirigida hacia abajo; y b) grafique la tensión en cada cable como una función de θ para $0 \leq \theta \leq 180^\circ$, y a partir de la gráfica determine el rango de valores de θ para los cuales los cables permanecen en tensión.

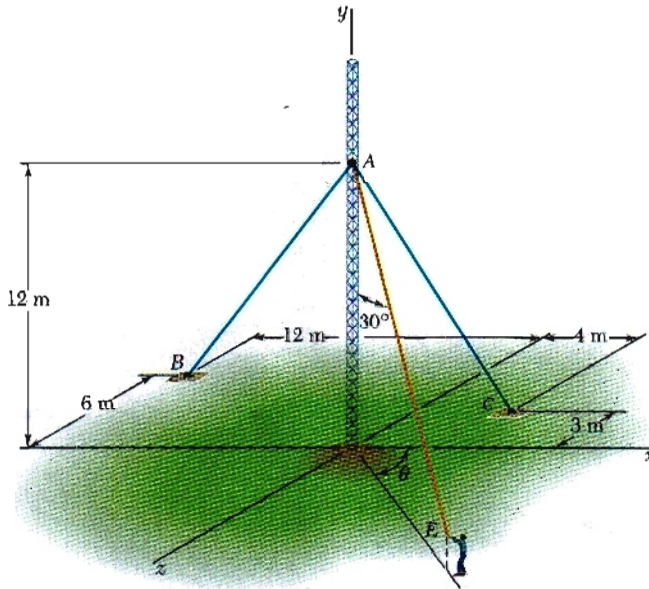


Figura P2.C9

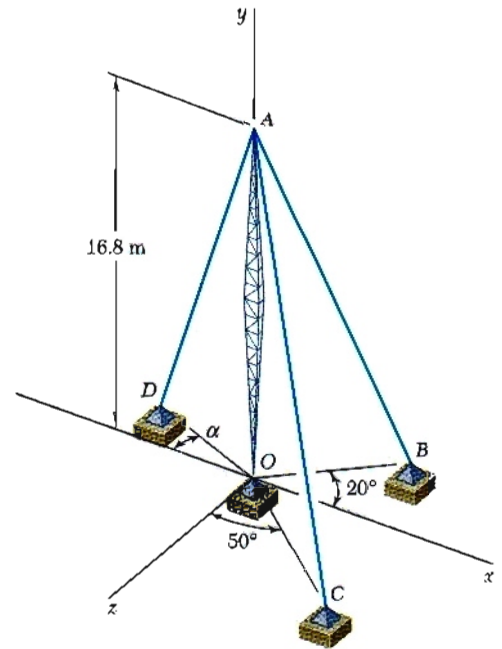


Figura P2.C8

2.C10 Los collares A y B están conectados por un alambre de 10 in. de longitud y pueden deslizarse libremente y sin fricción sobre las barras. Si se aplica una fuerza Q con una magnitud de 25 lb sobre el collar B , como se muestra en la figura, determine la tensión en el alambre y la magnitud correspondiente de la fuerza P requerida para mantener el equilibrio. Grafique la tensión en el alambre y la magnitud de la fuerza P para $0 \leq x \leq 5$ in.

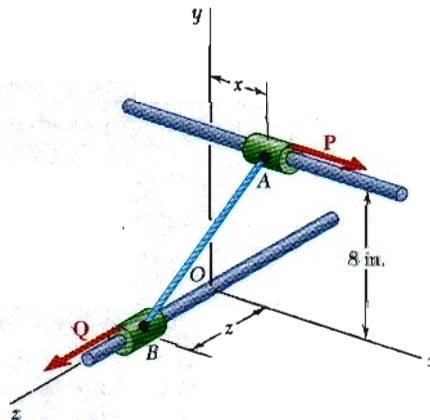


Figura P2.C10

Cuerpos rígidos: sistemas equivalentes de fuerza



En este capítulo se demostrará que el sistema de fuerzas no concurrentes que actúa sobre el arnés del paracaídas puede ser reemplazado por un sistema equivalente más simple.

CUERPOS RÍGIDOS: SISTEMAS EQUIVALENTES DE FUERZA

- 3.1 Introducción
- 3.2 Fuerzas externas e internas
- 3.3 Principio de transmisibilidad. Fuerzas equivalentes
- 3.4 Producto vectorial de dos vectores
- 3.5 Productos vectoriales expresados en términos de componentes rectangulares
- 3.6 Momento de una fuerza con respecto a un punto
- 3.7 Teorema de Varignon
- 3.8 Componentes rectangulares del momento de una fuerza
- 3.9 Producto escalar de dos vectores
- 3.10 Producto triple mixto de tres vectores
- 3.11 Momento de una fuerza con respecto a un eje dado
- 3.12 Momento de un par
- 3.13 Pares equivalentes
- 3.14 Adición o suma de pares
- 3.15 Los pares pueden representarse por medio de vectores
- 3.16 Descomposición de una fuerza dada en una fuerza en O y un par
- 3.17 Reducción de un sistema de fuerzas a una fuerza y un par
- 3.18 Sistemas equivalentes de fuerzas
- 3.19 Sistemas equipolentes de vectores
- 3.20 Otras reducciones de un sistema de fuerzas
- 3.21 Reducción de un sistema de fuerzas a una llave de torsión o torsor

3.1. INTRODUCCIÓN

En el capítulo anterior se supuso que cada uno de los cuerpos considerados podía ser tratado como si fuera una sola partícula. Sin embargo, esto no siempre es posible y, en general, un cuerpo debe tratarse como la combinación de varias partículas. Tendrá que tomarse en consideración el tamaño del cuerpo y también el hecho de que las fuerzas actúan sobre distintas partículas y, por tanto, tienen distintos puntos de aplicación.

Al definir que un *cuerpo rígido* es aquel que no se deforma, se supone que la mayoría de los cuerpos considerados en la mecánica elemental son *rígidos*. Sin embargo, las estructuras y máquinas reales nunca son absolutamente rígidas y se deforman bajo la acción de las cargas que actúan sobre ellas. A pesar de ello, por lo general esas deformaciones son pequeñas y no afectan las condiciones de equilibrio o de movimiento de la estructura en consideración. No obstante, tales deformaciones son importantes en lo concerniente a la resistencia a la falla de las estructuras y están consideradas en el estudio de la mecánica de materiales.

En este capítulo se estudiará el efecto de las fuerzas ejercidas sobre un cuerpo rígido y se aprenderá cómo reemplazar un sistema de fuerzas dado por un sistema equivalente más simple. Este análisis estará basado en la suposición fundamental de que el efecto de una fuerza dada sobre un cuerpo rígido permanece inalterado si dicha fuerza se mueve a lo largo de su línea de acción (*principio de transmisibilidad*). Por tanto, las fuerzas que actúan sobre un cuerpo rígido pueden representarse por *vectores deslizantes*, como se mencionó en la sección 2.3.

Dos conceptos fundamentales asociados con el efecto de una fuerza sobre un cuerpo rígido son el *momento de una fuerza con respecto a un punto* (sección 3.6) y el *momento de una fuerza con respecto a un eje* (sección 3.11). Como la determinación de estas cantidades involucra el cálculo de productos escalares y vectoriales de dos vectores, en este capítulo se presentarán los aspectos fundamentales del álgebra vectorial aplicados a la solución de problemas que involucran fuerzas que actúan sobre cuerpos rígidos.

Otro concepto que se presentará en este capítulo es el de un *par*, esto es, la combinación de dos fuerzas que tienen la misma magnitud, líneas de acción paralelas y sentidos opuestos (sección 3.12). Como se verá, cualquier sistema de fuerzas que actúa sobre un cuerpo rígido puede ser reemplazado por un sistema equivalente que consta de una fuerza, que actúa en cierto punto, y un par. Este sistema básico recibe el nombre de *sistema fuerza-par*. En el caso de fuerzas concurrentes, coplanares o paralelas, el sistema equivalente fuerza-par se puede reducir a una sola fuerza, denominada la *resultante* del sistema, o a un solo par, llamado el *par resultante* del sistema.

3.2. FUERZAS EXTERNAS E INTERNAS

Las fuerzas que actúan sobre los cuerpos rígidos se pueden dividir en dos grupos: 1) *fuerzas externas* y 2) *fuerzas internas*.

1. Las *fuerzas externas* representan la acción que ejercen otros cuerpos sobre el cuerpo rígido en consideración. Ellas son las responsables del comportamiento externo del cuerpo rígido. Las fuerzas externas causan que el cuerpo se mueva o aseguran que éste permanezca en reposo. En el presente capítulo y en los capítulos 4 y 5 se considerarán sólo las fuerzas externas.

2. Las **fuerzas internas** son aquellas que mantienen unidas las partículas que conforman al cuerpo rígido. Si éste está constituido en su estructura por varias partes, las fuerzas que mantienen unidas a dichas partes también se definen como fuerzas internas. Este grupo de fuerzas se estudiará en los capítulos 6 y 7.

Como ejemplo de fuerzas externas, considérense las fuerzas que actúan sobre un camión descompuesto que es arrastrado hacia delante por varios hombres mediante cuerdas unidas a la defensa delantera (figura 3.1). Las fuerzas externas que actúan sobre el camión se muestran en un *diagrama de cuerpo libre* (figura 3.2). En primer lugar, se debe considerar el **peso** del camión. A pesar de que el peso representa el efecto de la atracción de la Tierra sobre cada una de las partículas que constituyen al camión, éste se puede representar por medio de una sola fuerza W . El *punto de aplicación* de esta fuerza, esto es, el punto en el que actúa la fuerza, se define como el *centro de gravedad* del camión. En el capítulo 5 se verá cómo se pueden determinar los centros de gravedad. El peso W hace que el camión se mueva hacia abajo. De hecho, si no fuera por la presencia del piso, el peso podría ocasionar que el camión se moviera hacia abajo, esto es, que cayera. El piso se opone a la caída del camión por medio de las reacciones R_1 y R_2 . Estas fuerzas se ejecen por el piso *sobre* el camión y, por tanto, deben ser incluidas entre las fuerzas externas que actúan sobre el camión.

Los hombres ejercen la fuerza F al tirar de la cuerda. El punto de aplicación de F está en la *defensa delantera*. La fuerza F tiende a hacer que el camión se mueva hacia delante en línea recta y, en realidad, logra moverlo puesto que no existe una fuerza externa que se oponga a dicho movimiento. (Para simplificar, en este caso se ha despreciado la resistencia a la rodadura.) Este movimiento del camión hacia delante, donde cada línea recta mantiene su orientación original (el piso del camión permanece horizontal y sus lados se mantienen verticales), se conoce como *traslación*. Otras fuerzas podrían ocasionar que el camión se moviera en forma diferente. Por ejemplo, la fuerza ejercida por un gato colocado debajo del eje delantero podría ocasionar que el camión rotara alrededor de su eje trasero. Este movimiento es una *rotación*. Por tanto, se puede concluir que cada una de las **fuerzas externas** que actúan sobre un **cuerpo rígido** puede ocasionar un movimiento de traslación, rotación o ambos, siempre y cuando dichas fuerzas no encuentren alguna oposición.

3.3. PRINCIPIO DE TRANSMISIBILIDAD. FUERZAS EQUIVALENTES

El *principio de transmisibilidad* establece que las condiciones de equilibrio o de movimiento de un cuerpo rígido permanecerán inalteradas si una fuerza F que actúa en un punto dado de ese cuerpo se reemplaza por una fuerza F' que tiene la misma magnitud y dirección, pero que actúa en un punto distinto, *siempre y cuando las dos fuerzas tengan la misma línea de acción* (figura 3.3). Las dos fuerzas, F y F' , tienen el mismo efecto sobre el cuerpo rígido y se dice que son *equivalentes*. Este principio establece que la acción de una fuerza puede ser *transmitida* a lo largo de su línea de acción, lo cual está basado en la evidencia experimental; *no puede* ser derivado a partir de las propiedades establecidas hasta ahora en este libro y, por tanto, debe ser aceptado como una ley experimental. Sin embargo, como se verá en la sección 16.5, el principio de transmisibilidad puede ser derivado a partir del estudio de la *dinámica* de los cuerpos rígidos, pero dicho estudio requiere la introduc-

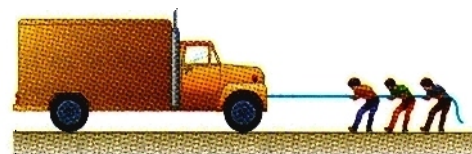


Figura 3.1

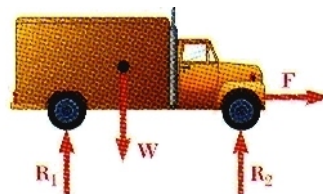


Figura 3.2

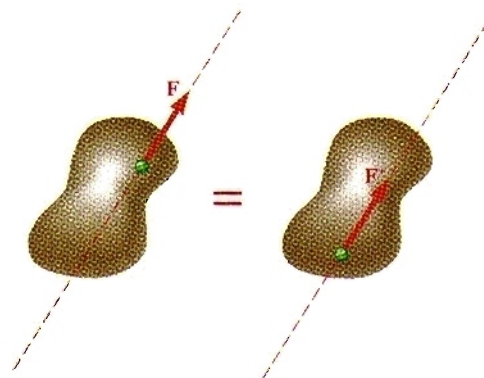


Figura 3.3

ción de la segunda y tercera leyes de Newton y también algunos otros conceptos. Por consiguiente, el estudio de la estática de los cuerpos rígidos estará basado en los tres principios que se han presentado hasta ahora, que son la ley del paralelogramo para la adición de vectores, la primera ley de Newton y el principio de transmisibilidad.

En el capítulo 2 se mencionó que las fuerzas que actúan en una partícula pueden ser representadas por vectores, los cuales tienen un punto de aplicación bien definido, la partícula misma y, por consiguiente, serán vectores fijos o adheridos. Sin embargo, en el caso de fuerzas que actúan sobre un cuerpo rígido el punto de aplicación de una fuerza no es importante, siempre y cuando su línea de acción permanezca inalterada. Por tanto, las fuerzas que actúan sobre un cuerpo rígido deben ser representadas por una clase de vector diferente, el *vector deslizante*, puesto que permite que las fuerzas se deslicen a lo largo de su línea de acción. Es importante señalar que todas las propiedades que serán derivadas en las siguientes secciones para las fuerzas que actúan sobre un cuerpo rígido serán, en general, válidas para cualquier sistema de vectores deslizantes. Sin embargo, para mantener la presentación más intuitiva, ésta se llevará a cabo en términos de fuerzas físicas en lugar de las entidades matemáticas conocidas como vectores deslizantes.

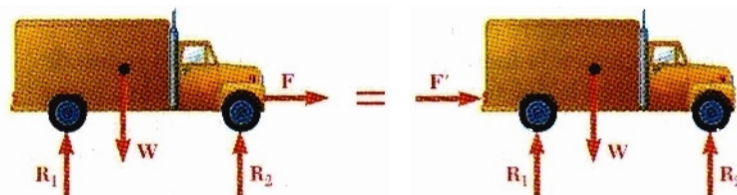


Figura 3.4

En el ejemplo del camión, en primer lugar se observa que la línea de acción de la fuerza F es una línea horizontal que pasa a través de las defensas delantera y trasera del camión (figura 3.4). Por tanto, empleando el principio de transmisibilidad se puede reemplazar F por una fuerza equivalente F' que actúa sobre la defensa trasera. En otras palabras, las condiciones de movimiento y todas las demás fuerzas externas que actúan sobre el camión (W , R_1 y R_2) permanecen inalteradas si los hombres empujan la defensa trasera en lugar de tirar de la defensa delantera.

El principio de transmisibilidad y el concepto de fuerzas equivalentes tienen limitaciones. Por ejemplo, considere una barra corta AB sobre la cual actúan dos fuerzas axiales iguales y opuestas P_1 y P_2 como se muestra en la figura 3.5a. De acuerdo con el principio de transmisibilidad, la fuerza P_2 se puede reemplazar por una fuerza P'_2 que tiene la misma magnitud, misma dirección y misma línea de acción pero que actúa en A en lugar de en B (figura 3.5b). Las fuerzas P_1 y P'_2 que actúan sobre la misma partícula pueden sumarse de acuerdo a las reglas del capítulo 2 y, como dichas

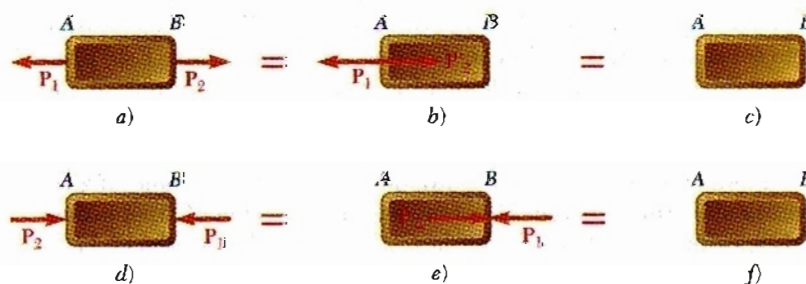


Figura 3.5

fuerzas son iguales y opuestas, su suma es igual a cero. Por tanto, en términos del comportamiento externo de la barra el sistema de fuerzas original mostrado en la figura 3.5a es equivalente a que no existiera fuerza alguna que actúe sobre la barra (figura 3.5c).

Considere ahora las dos fuerzas iguales y opuestas \mathbf{P}_1 y \mathbf{P}_2 que actúan sobre la barra AB , como se muestra en la figura 3.5d. La fuerza \mathbf{P}_2 puede ser reemplazada por una fuerza \mathbf{P}'_2 que tiene la misma magnitud, misma dirección y misma línea de acción pero que actúa en B en lugar de en A (figura 3.5e). Entonces, las fuerzas \mathbf{P}_1 y \mathbf{P}'_2 pueden sumarse y, nuevamente, su suma es igual a cero (figura 3.5f). De esta manera, desde el punto de vista de la mecánica de los cuerpos rígidos, los sistemas mostrados en la figura 3.5a y d son equivalentes. Sin embargo, resulta obvio que las *fuerzas internas* y las *deformaciones* producidas por los dos sistemas son diferentes. La barra de la figura 3.5a está en *tensión* y, si no es en su totalidad rígida, se incrementará ligeramente su longitud; la barra de la figura 3.5d está en *compresión* y, si no es rígida, disminuirá en poco su longitud. De esta forma, aunque el principio de transmisibilidad se puede usar en forma libre para determinar las condiciones de movimiento o de equilibrio de los cuerpos rígidos y para calcular las fuerzas externas que actúan sobre los mismos, debe evitarse, o por lo menos, emplearse con cuidado, al momento de determinar fuerzas internas y deformaciones.

3.4. PRODUCTO VECTORIAL DE DOS VECTORES

Para entender mejor el efecto de una fuerza sobre un cuerpo rígido, a continuación se introducirá un nuevo concepto: el *momento de una fuerza con respecto a un punto*. Este concepto se podrá entender más fácilmente y podrá aplicarse en una forma más efectiva si primero se agrega a las herramientas matemáticas que se tienen disponibles, el *producto vectorial* de dos vectores.

El producto vectorial de los vectores \mathbf{P} y \mathbf{Q} se define como el vector \mathbf{V} que satisface las siguientes condiciones.

1. La línea de acción de \mathbf{V} es perpendicular al plano que contiene a \mathbf{P} y \mathbf{Q} (figura 3.6a).
2. La magnitud de \mathbf{V} es el producto de las magnitudes de \mathbf{P} y \mathbf{Q} por el seno del ángulo θ formado por \mathbf{P} y \mathbf{Q} (cuya medida siempre deberá ser menor o igual a 180°); por tanto, se tiene

$$V = PQ \sin \theta \quad (3.1)$$

3. La dirección de \mathbf{V} se obtiene a partir de la *regla de la mano derecha*. Cierre su mano derecha y manténgala de manera que sus dedos estén doblados en el primer sentido que la rotación a través del ángulo θ que haría al vector \mathbf{P} colineal con el vector \mathbf{Q} ; entonces, su dedo pulgar indicará la dirección del vector \mathbf{V} (figura 3.6b). Obsérvese que si \mathbf{P} y \mathbf{Q} no tienen un punto de aplicación común, estos primeros se deben volver a dibujar a partir del mismo punto. Se dice que los tres vectores \mathbf{P} , \mathbf{Q} y \mathbf{V} —tomados en ese orden— forman una *tríada a mano derecha*.[†]

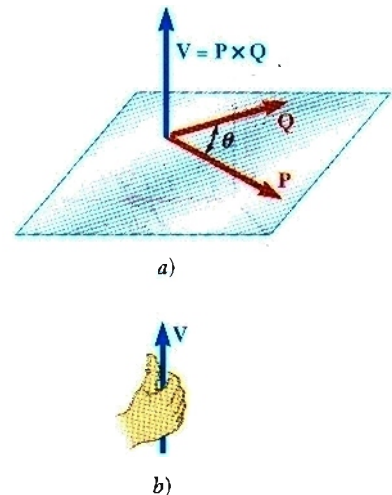


Figura 3.6

[†]Se debe señalar que los ejes x , y y z utilizados en el capítulo 2 forman un sistema de ejes ortogonales a mano derecha y que los vectores unitarios \mathbf{i} , \mathbf{j} y \mathbf{k} definidos en la sección 2.12 forman una tríada ortogonal a mano derecha.

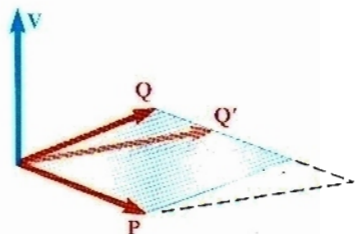


Figura 3.7

Como se mencionó anteriormente, el vector \mathbf{V} que satisface estas tres condiciones (las cuales lo definen en forma única) se conoce como el producto vectorial de \mathbf{P} y \mathbf{Q} y se representa por la expresión matemática

$$\mathbf{V} = \mathbf{P} \times \mathbf{Q} \quad (3.2)$$

En virtud de la notación utilizada, el producto vectorial de dos vectores \mathbf{P} y \mathbf{Q} también se conoce como el *producto cruz* de \mathbf{P} y \mathbf{Q} .

A partir de la ecuación (3.1) se concluye que cuando dos vectores \mathbf{P} y \mathbf{Q} tienen la misma dirección, o direcciones opuestas, su producto vectorial es igual a cero. En el caso general, cuando el ángulo θ formado por los dos vectores no es 0° ni 180° , a la ecuación (3.1) se le puede dar una interpretación geométrica simple: la magnitud V del producto vectorial de \mathbf{P} y \mathbf{Q} es igual al área del paralelogramo que tiene como lados a \mathbf{P} y \mathbf{Q} (figura 3.7). Por tanto, el producto vectorial $\mathbf{P} \times \mathbf{Q}$ permanece inalterado si \mathbf{Q} se reemplaza por un vector \mathbf{Q}' que sea coplanar a \mathbf{P} y \mathbf{Q} y tal que la línea que une a las partes terminales de \mathbf{Q} y \mathbf{Q}' sea paralelo a \mathbf{P} . Así, se escribe

$$\mathbf{V} = \mathbf{P} \times \mathbf{Q} = \mathbf{P} \times \mathbf{Q}' \quad (3.3)$$

A partir de la tercera condición empleada para definir al producto vectorial \mathbf{V} de \mathbf{P} y \mathbf{Q} , esto es, la condición que establece que \mathbf{P} , \mathbf{Q} y \mathbf{V} deben formar una tríada a mano derecha, se concluye que los productos vectoriales *no son conmutativos*, es decir, $\mathbf{Q} \times \mathbf{P}$ no es igual a $\mathbf{P} \times \mathbf{Q}$. De hecho, se puede verificar fácilmente que $\mathbf{Q} \times \mathbf{P}$ está representado por el vector $-\mathbf{V}$, que es igual y opuesto a \mathbf{V} , entonces se escribe

$$\mathbf{Q} \times \mathbf{P} = -(\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) \quad (3.4)$$

Ejemplo. Calcúlese el producto vectorial $\mathbf{V} = \mathbf{P} \times \mathbf{Q}$ cuando el vector \mathbf{P} tiene una magnitud de 6 y se encuentra en el plano xz que forma un ángulo de 30° con el eje x y el vector \mathbf{Q} tiene una magnitud de 4 y se encuentra a lo largo del eje x (figura 3.8).

A partir de la definición del producto vectorial se concluye que el vector \mathbf{V} debe estar a lo largo del eje y , tener la magnitud

$$V = PQ \sin \theta = (6)(4) \sin 30^\circ = 12$$

y que debe estar dirigido hacia arriba.

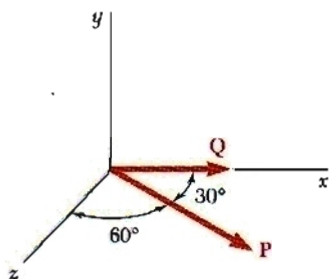


Figura 3.8

Se vio que la propiedad conmutativa no es aplicable en el caso de productos vectoriales. Ahora se puede preguntar si la propiedad *distributiva* se cumple, esto es, si la relación

$$\mathbf{P} \times (\mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2) = \mathbf{P} \times \mathbf{Q}_1 + \mathbf{P} \times \mathbf{Q}_2 \quad (3.5)$$

es válida. La respuesta es *sí*. Probablemente muchos lectores están dispuestos a aceptar sin demostración formal una respuesta que de manera intuitiva puede parecer correcta. Sin embargo, dado que la estructura del álgebra vectorial y de la estática depende de la relación (3.5), se debe tomar el tiempo necesario para su deducción.

Si se pierde la generalidad se puede suponer que \mathbf{P} está dirigida a lo largo del eje y (figura 3.9a). Representando con \mathbf{Q} la suma de \mathbf{Q}_1 y \mathbf{Q}_2 , se trazan perpendiculares a partir de los extremos terminales de \mathbf{Q} , \mathbf{Q}_1 y \mathbf{Q}_2 hacia el plano xz , quedando definidos de esta forma los vectores \mathbf{Q}' , \mathbf{Q}'_1 , \mathbf{Q}'_2 . Se hará referencia a estos vectores, respectivamente, como las *proyecciones* de la ecuación (3.3), se observa que el término del lado izquierdo de la ecuación (3.5) puede ser reemplazado por $\mathbf{P} \times \mathbf{Q}'$ y que, en forma similar, los productos vectoriales $\mathbf{P} \times$

Q_1 y $P \times Q_2$ del lado derecho pueden ser reemplazados, respectivamente, por $P \times Q'_1$ y $P \times Q'_2$. De esta forma, la relación que debe ser demostrada puede escribirse de la siguiente manera

$$P \times Q' = P \times Q'_1 + P \times Q'_2 \quad (3.5')$$

Ahora se observa que $P \times Q'$ se puede obtener a partir de Q' multiplicando a este vector por el escalar P y rotándolo 90° en el plano xz en el sentido contrario al del movimiento de las manecillas del reloj (figura 3.9b); los otros dos productos vectoriales en (3.5') se pueden obtener

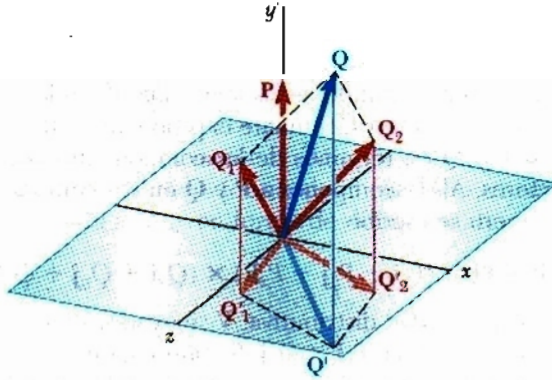
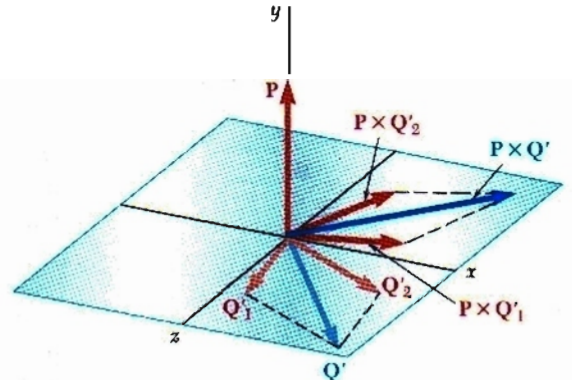


Figura 3.9

a)



b)

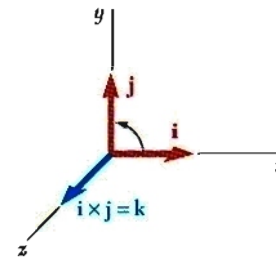
en forma similar a partir de Q'_1 y Q'_2 , respectivamente. Ahora, en virtud de que la proyección de un paralelogramo sobre cualquier plano arbitrario es otro paralelogramo, la proyección Q' de la suma Q de Q_1 y Q_2 debe ser la suma de las proyecciones Q'_1 y Q'_2 de Q_1 y Q_2 sobre el mismo plano (figura 3.9a). Esta relación entre los tres vectores Q' , Q'_1 y Q'_2 seguirá siendo válida después de que los tres vectores hayan sido multiplicados por el escalar P y hayan sido rotados a través de un ángulo de 90° (figura 3.9b). Por tanto, se ha demostrado la relación (3.5') y se puede tener la certeza de que la propiedad distributiva es válida para los productos vectoriales.

Una tercera propiedad es la asociativa, la cual no es válida para los productos vectoriales; en general, se tiene que

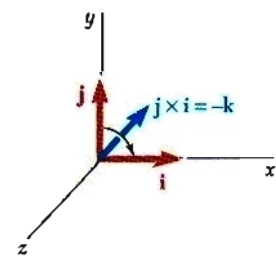
$$(P \times Q) \times S \neq P \times (Q \times S) \quad (3.6)$$

3.5. PRODUCTOS VECTORIALES EXPRESADOS EN TÉRMINOS DE COMPONENTES RECTANGulares

A continuación se procederá a determinar el producto vectorial de cualquier par de los vectores unitarios i , j y k , que fueron definidos en el capítulo 2. Considérese primero el producto $i \times j$ (figura 3.10a). Como ambos vectores tienen una magnitud igual a 1 y dado que éstos forman ángulos rectos entre sí, su producto vectorial también deberá ser un vector unitario. Dicho vector unitario debe ser k , puesto que los vectores i , j y k son mutuamente perpendiculares y forman una tríada a mano derecha. Por otra parte, a partir de la regla de la mano derecha presentada en el punto 3 de la sección 3.4, se concluye que el producto $j \times i$ debe ser igual a $-k$ (figura 3.10b). Por último, se debe ob-



a)



b)

Figura 3.10

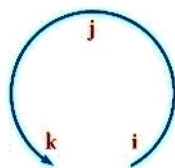


Figura 3.11

servar que el producto vectorial de un vector consigo mismo, como $\mathbf{i} \times \mathbf{i}$, es igual a cero debido a que ambos vectores tienen la misma dirección. Los productos vectoriales para los diversos pares posibles de vectores unitarios son

$$\begin{array}{lll} \mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{0} & \mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k} & \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \\ \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} & \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{0} & \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i} \\ \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j} & \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i} & \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0} \end{array} \quad (3.7)$$

Si se ordena las tres letras que representan a los vectores unitarios en un círculo en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj (figura 3.11) se puede facilitar la determinación del signo del producto vectorial de dos vectores unitarios: el producto de dos vectores unitarios será positivo si éstos se siguen uno a otro en un orden contrario al movimiento de las manecillas del reloj y será negativo si éstos se siguen uno al otro en un orden en el sentido de las manecillas del reloj.

Ahora se puede expresar fácilmente el producto vectorial \mathbf{V} de dos vectores dados \mathbf{P} y \mathbf{Q} en términos de las componentes rectangulares de dichos vectores. Al descomponer a \mathbf{P} y \mathbf{Q} en sus componentes rectangulares, primero se escribe

$$\mathbf{V} = \mathbf{P} \times \mathbf{Q} = (P_x \mathbf{i} + P_y \mathbf{j} + P_z \mathbf{k}) \times (Q_x \mathbf{i} + Q_y \mathbf{j} + Q_z \mathbf{k})$$

Con el uso de la propiedad distributiva, \mathbf{V} se expresa como la suma de productos vectoriales, como $P_x \mathbf{i} \times Q_y \mathbf{j}$. Se observa que cada una de las expresiones obtenidas es igual al producto vectorial de dos vectores unitarios, como $\mathbf{i} \times \mathbf{j}$, multiplicados por el producto de dos escalares, como $P_x Q_y$, y recordando las identidades (3.7) después de factorizar a \mathbf{i} , \mathbf{j} y \mathbf{k} , se obtiene

$$\mathbf{V} = (P_y Q_z - P_z Q_y) \mathbf{i} + (P_z Q_x - P_x Q_z) \mathbf{j} + (P_x Q_y - P_y Q_x) \mathbf{k} \quad (3.8)$$

Por tanto, las componentes rectangulares del producto vectorial \mathbf{V} están dadas por

$$\begin{array}{l} V_x = P_y Q_z - P_z Q_y \\ V_y = P_z Q_x - P_x Q_z \\ V_z = P_x Q_y - P_y Q_x \end{array} \quad (3.9)$$

De regreso a la ecuación (3.8), se observa que el término del lado derecho representa el desarrollo de un determinante. Por tanto, el producto vectorial \mathbf{V} puede expresarse de la siguiente forma, que es más sencilla de memorizar:[†]

$$\mathbf{V} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix} \quad (3.10)$$

[†]Cualquier determinante que conste de tres renglones y tres columnas se puede evaluar repitiendo la primera y la segunda columnas, y formando productos a lo largo de cada línea diagonal. Entonces, la suma de los productos obtenidos a lo largo de la línea roja se resta de la suma de los productos obtenidos a lo largo de las líneas negras.



Considere una fuerza \mathbf{F} que actúa sobre un cuerpo rígido (figura 3.12a). Como se sabe, la fuerza \mathbf{F} está representada por un vector que define la magnitud y su dirección. Sin embargo, el efecto de la fuerza sobre el cuerpo rígido también depende de su punto de aplicación A . La posición de A puede definirse de manera conveniente por medio del vector \mathbf{r} que une al punto de referencia fijo O con A ; a este vector se le conoce como el *vector de posición de A* .¹ El vector de posición \mathbf{r} y la fuerza \mathbf{F} definen el plano mostrado en la figura 3.12a.

El *momento de \mathbf{F} con respecto a O* se define como el producto vectorial de \mathbf{r} y \mathbf{F} :

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (3.11)$$

De acuerdo con la definición del producto vectorial dada en la sección 3.4, el momento \mathbf{M}_O debe ser perpendicular al plano que contiene el punto O y a la fuerza \mathbf{F} . El sentido de \mathbf{M}_O está definido por el sentido de la rotación que haría al vector \mathbf{r} colineal con el vector \mathbf{F} ; un observador localizado en el extremo de \mathbf{M}_O ve a esta rotación como una rotación *en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj*. Otra forma de definir el sentido de \mathbf{M}_O se logra por medio de la regla de la mano derecha: cierre su mano derecha y manténgala de manera que sus dedos estén doblados en el mismo sentido de la rotación que \mathbf{F} le impartiría al cuerpo rígido alrededor de un eje fijo dirigido a lo largo de la línea de acción de \mathbf{M}_O ; su dedo pulgar indicará el sentido del momento \mathbf{M}_O (figura 3.12b).

Por último, representado con θ el ángulo entre las líneas de acción del vector de posición \mathbf{r} y la fuerza \mathbf{F} , se encuentra que la magnitud del momento de \mathbf{F} con respecto a O está dada por

$$M_O = rF \sin \theta = Fd \quad (3.12)$$

donde d representa la distancia perpendicular desde O hasta la línea de acción de \mathbf{F} . En virtud de que la *tendencia de la fuerza \mathbf{F} a hacer girar al cuerpo rígido alrededor de un eje fijo perpendicular a la fuerza* depende tanto de la distancia de \mathbf{F} a dicho eje como de la magnitud de \mathbf{F} , se observa que la *magnitud de \mathbf{M}_O mide la tendencia de la fuerza \mathbf{F} a hacer rotar al cuerpo rígido alrededor de un eje fijo dirigido a lo largo de \mathbf{M}_O* .

En el sistema de unidades del SI, donde la fuerza se expresa en newtons (N) y la distancia se expresa en metros (m), el momento de una fuerza estará expresado en newtons-metro (N · m). En el sistema de unidades de uso común en Estados Unidos, donde la fuerza se expresa en libras y la distancia en pies o en pulgadas, el momento de una fuerza se expresa en lb · ft o en lb · in.

Se puede observar que a pesar de que el momento \mathbf{M}_O de una fuerza con respecto a un punto depende de la magnitud, la línea de acción y el sentido de la fuerza, dicho momento *no* depende de la posición que tiene el punto de aplicación de la fuerza a lo largo de su línea de acción. En consecuencia, el momento \mathbf{M}_O de una fuerza \mathbf{F} no caracteriza a la posición del punto de aplicación de \mathbf{F} .

¹se puede comprobar que los vectores de posición obedecen la ley de la adición de vectores y, por tanto, realmente son vectores. Considérese, por ejemplo, los vectores de posición \mathbf{r} y \mathbf{r}' de A con respecto a dos puntos de referencia O y O' y al vector de posición \mathbf{s} de O con respecto a O' (figura 3.40a, Sec. 3.16). Se comprueba que el vector de posición $\mathbf{r}' = \overrightarrow{O'A}$ puede obtenerse a partir de los vectores de posición $\mathbf{s} = \overrightarrow{O'O}$ y $\mathbf{r} = \overrightarrow{OA}$ aplicando la regla del triángulo para la suma de vectores.

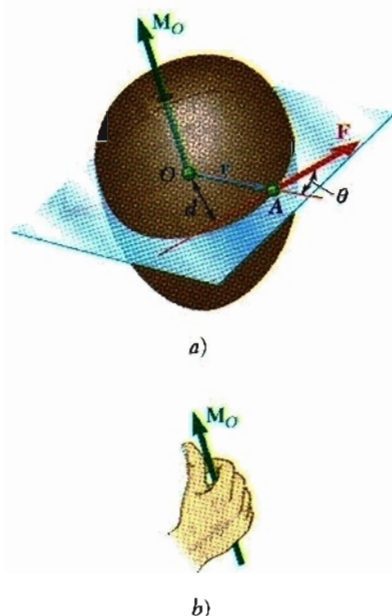


Figura 3.12

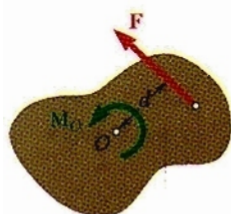
Sin embargo, como se verá a continuación, el momento M_O de una fuerza F de magnitud y dirección conocida *define completamente a la línea de acción de F* . Además la línea de acción de F debe estar en un plano que pasa por el punto O y es perpendicular al momento M_O . La distancia d medida desde O hasta la línea de acción de la fuerza debe ser igual al cociente de las magnitudes de M_O y F , esto es, debe ser igual a M_O/F . El sentido de M_O determina si la línea de acción debe trazarse del lado de F del lado del punto O .

Recuérdese la sección 3.3, donde se señala que el principio de transmisibilidad establece que dos fuerzas F y F' son equivalentes (esto es, tienen el mismo efecto sobre el cuerpo rígido) si tienen la misma magnitud, dirección y línea de acción. Este principio se puede expresar ahora de la siguiente forma: *dos fuerzas F y F' son equivalentes si, y sólo si, son iguales* (es decir, tienen la misma magnitud y la misma dirección) *y, además, tienen momentos iguales con respecto a un punto O* . Las condiciones necesarias y suficientes para que dos fuerzas F y F' sean equivalentes son

$$F = F' \quad \text{y} \quad M_O = M_O \quad (3.13)$$

Debe señalarse que el enunciado anterior implica que si las relaciones (3.13) se cumplen para cierto punto O , también se cumplirán para cualquier otro punto.

Problemas en dos dimensiones. Muchas aplicaciones tratan con estructuras bidimensionales, es decir, estructuras cuyo espesor es despreciable en comparación con su longitud y su anchura, las cuales están sujetas a fuerzas contenidas en su mismo plano. Dichas estructuras bidimensionales y las fuerzas que actúan sobre ellas pueden representarse fácilmente sobre una hoja de papel o sobre una pizarra. Por tanto, su análisis es más simple que el correspondiente al caso de las estructuras y fuerzas tridimensionales.



$$a) M_O = + Fd$$

Figura 3.13



$$b) M_O = - Fd$$

Considere, por ejemplo, una placa rígida sobre la que actúa una fuerza F (figura 3.13). El momento de F con respecto a un punto O seleccionado en el plano de la figura está representado por el vector M_O de magnitud Fd , que es perpendicular a dicho plano. En la figura 3.13a el vector M_O apunta hacia *afuera* del plano de papel, mientras que en la figura 3.13b éste apunta hacia *adentro* del plano de papel. Como se observa en la figura, en el primer caso, la fuerza de la figura 3.13a tiende a hacer rotar la placa en un sentido contrario al del movimiento de las manecillas del reloj mientras que, en el segundo caso, la fuerza de la figura 3.13b tiende a hacer rotar la placa en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj. Por consiguiente, es natural referirse al sentido del momento F con respecto a O en la figura 3.13a como opuesto al del movimiento de las manecillas del reloj (antihorario) \uparrow , y en la figura 3.13b como siguiendo la dirección del movimiento de las manecillas del reloj (horario) \downarrow .

Puesto que el momento de la fuerza F que actúa en el plano de la figura debe ser perpendicular a dicho plano, sólo se necesita especificar la *magnitud* y el *sentido* del momento F con respecto a O . Esto se

puede hacer asignándole a la magnitud M_O del momento un signo positivo o negativo, según el vector \mathbf{M}_O apunte hacia afuera o hacia adentro del plano de papel.

3.7. TEOREMA DE VARIGNON

La propiedad distributiva de los productos vectoriales se puede emplear para determinar el momento de la resultante de varias fuerzas concurrentes. Si las fuerzas $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \dots$ se aplican en el mismo punto A (figura 3.14) y si se representa por \mathbf{r} al vector de posición A , a partir de la ecuación (3.5) de la sección 3.4, se puede concluir que

$$\mathbf{r} \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \dots) = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r} \times \mathbf{F}_2 + \dots \quad (3.14)$$

Esto es, el momento con respecto a un punto dado O de la resultante de varias fuerzas concurrentes es igual a la suma de los momentos de las distintas fuerzas con respecto al mismo punto O . Esta propiedad la descubrió el matemático francés Pierre Varignon (1654-1722) mucho antes de inventarse el álgebra vectorial, por lo que se le conoce como el teorema de Varignon.

La relación (3.14) permite reemplazar el cálculo directo del momento de una fuerza \mathbf{F} por el cálculo de los momentos de dos o más fuerzas componentes. Como se verá en la siguiente sección, por lo general la fuerza \mathbf{F} será separada en sus componentes paralelas a los ejes coordenados. Sin embargo, será mucho más rápido en algunos casos descomponer a \mathbf{F} en componentes no paralelas a los ejes coordenados (véase el problema resuelto 3.3).

3.8. COMPONENTES RECTANGULARES DEL MOMENTO DE UNA FUERZA

En general, la determinación del momento de una fuerza en el espacio se simplifica en forma considerable si el vector de fuerza y el vector de posición a partir de su punto de aplicación se descomponen en sus componentes rectangulares x, y y z . Por ejemplo, considere el momento \mathbf{M}_O con respecto a O de una fuerza \mathbf{F} con componentes F_x, F_y y F_z que está aplicada en el punto A de coordenadas x, y y z (figura 3.15). Se observa que las componentes del vector de posición \mathbf{r} son iguales, respectivamente, a las coordenadas x, y y z del punto A , se escribe

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \quad (3.15)$$

$$\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k} \quad (3.16)$$

Al sustituir a \mathbf{r} y a \mathbf{F} a partir de (3.15) y (3.16) en

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (3.11)$$

y recordar los resultados obtenidos en la sección 3.5, se puede escribir el momento \mathbf{M}_O de \mathbf{F} con respecto a O de la siguiente forma

$$\mathbf{M}_O = M_x\mathbf{i} + M_y\mathbf{j} + M_z\mathbf{k} \quad (3.17)$$

donde las componentes escalares M_x, M_y y M_z están definidas por las relaciones

$$\begin{aligned} M_x &= yF_z - zF_y \\ M_y &= zF_x - xF_z \\ M_z &= xF_y - yF_x \end{aligned} \quad (3.18)$$

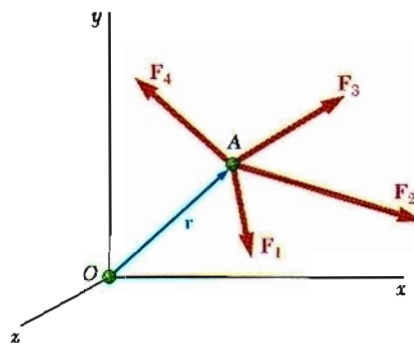


Figura 3.14

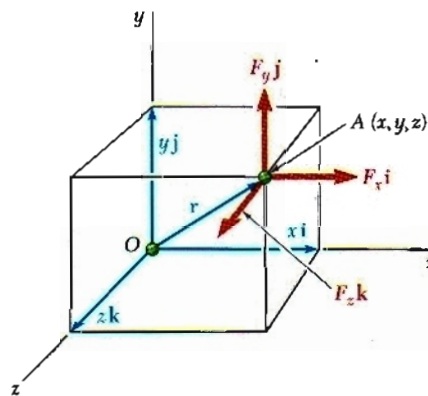


Figura 3.15

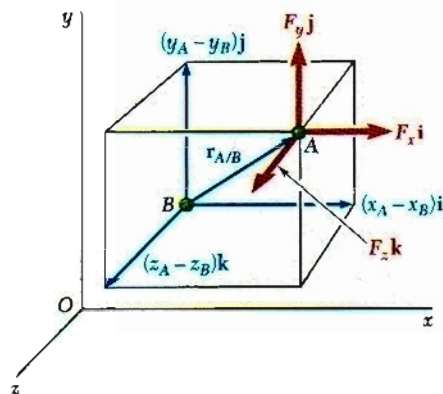


Figura 3.16

Como se verá en la sección 3.11, las componentes escalares M_x , M_y y M_z del momento \mathbf{M}_O miden la tendencia de la fuerza \mathbf{F} a impartirle a un cuerpo rígido un movimiento de rotación alrededor de los ejes x , y y z , respectivamente. Sustituyendo (3.18) en (3.17), también puede escribirse a \mathbf{M}_O en forma de determinante

$$\mathbf{M}_O = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \quad (3.19)$$

Para calcular el momento \mathbf{M}_B de una fuerza \mathbf{F} aplicada en A con respecto a un punto arbitrario B (figura 3.16), se debe reemplazar el vector de posición \mathbf{r} en la ecuación (3.11) por un vector trazado desde B hasta A . Este vector es el de posición de A relativo a B y se representa por $\mathbf{r}_{A/B}$. Se observa que $\mathbf{r}_{A/B}$ se puede obtener si se resta \mathbf{r}_B de \mathbf{r}_A ; por tanto, se escribe

$$\mathbf{M}_B = \mathbf{r}_{A/B} \times \mathbf{F} = (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B) \times \mathbf{F} \quad (3.20)$$

o bien, en forma determinante

$$\mathbf{M}_B = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_{A/B} & y_{A/B} & z_{A/B} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \quad (3.21)$$

donde $x_{A/B}$, $y_{A/B}$ y $z_{A/B}$ representan las componentes del vector $\mathbf{r}_{A/B}$:

$$x_{A/B} = x_A - x_B \quad y_{A/B} = y_A - y_B \quad z_{A/B} = z_A - z_B$$

En el caso de problemas en dos dimensiones, se puede suponer que la fuerza \mathbf{F} está contenida en el plano xy (figura 3.17). Al hacer $z = 0$ y $F_z = 0$ en la ecuación (3.19), se obtiene

$$\mathbf{M}_O = (xF_y - yF_x)\mathbf{k}$$

Con esto se verifica que el momento de \mathbf{F} con respecto a O es perpendicular al plano de la figura y está completamente definido por el escalar

$$M_O = M_z = xF_y - yF_x \quad (3.22)$$

Como se mencionó antes, un valor positivo de M_O indica que el vector \mathbf{M}_O apunta hacia afuera del plano del papel (la fuerza \mathbf{F} tiende a hacer rotar al cuerpo con respecto a O en un sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj) y un valor negativo indica que el vector \mathbf{M}_O apunta hacia adentro del plano del papel (la fuerza \mathbf{F} tiende a hacer rotar el cuerpo con respecto a O en el sentido de las manecillas del reloj).

Para calcular el momento con respecto a un punto B de coordenadas $B(x_B, y_B)$ de una fuerza contenida en el plano xy , aplicada en el punto $A(x_A, y_A)$ (figura 3.18), se hace $z_{A/B} = 0$ y $F_z = 0$ en las relaciones (3.21) y se comprueba que el vector \mathbf{M}_B es perpendicular al plano xy y está definido en magnitud y sentido por su componente escalar

$$M_B = (x_A - x_B)F_y - (y_A - y_B)F_x \quad (3.23)$$

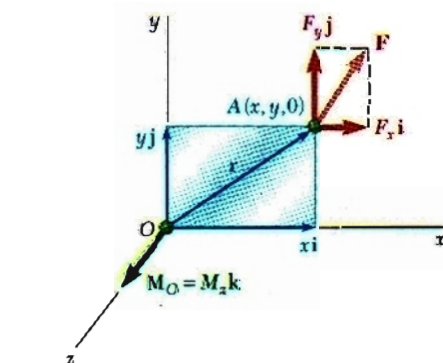


Figura 3.17

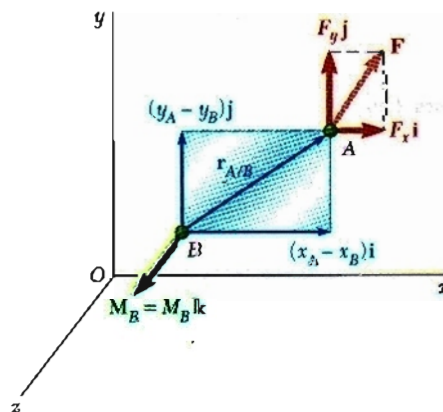
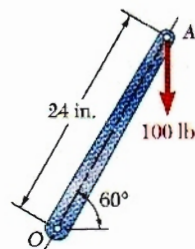


Figura 3.18



PROBLEMA RESUELTO 3.1

Una fuerza vertical de 100 lb se aplica en el extremo de una palanca que está unida a una flecha en el punto O . Determine: *a*) el momento de la fuerza de 100 lb con respecto a O ; *b*) la fuerza horizontal aplicada en A que origina el mismo momento con respecto a O ; *c*) la fuerza mínima aplicada en A que origina el mismo momento con respecto a O ; *d*) qué tan lejos de la flecha debe actuar una fuerza vertical de 240 lb para originar el mismo momento con respecto a O , y *e*) si alguna de las fuerzas obtenidas en los incisos *b*), *c*) y *d*) es equivalente a la fuerza original.

SOLUCIÓN

a) Momento con respecto a O . La distancia perpendicular desde O hasta la línea de acción de la fuerza de 100 lb es

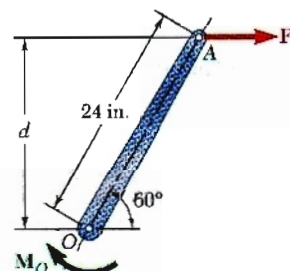
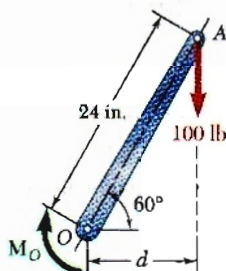
$$d = (24 \text{ in.}) \cos 60^\circ = 12 \text{ in.}$$

La magnitud del momento de la fuerza de 100 lb con respecto a O es igual a

$$M_O = Fd = (100 \text{ lb})(12 \text{ in.}) = 1\,200 \text{ lb} \cdot \text{in.}$$

Como la fuerza tiende a hacer rotar la palanca alrededor de O en el sentido de las manecillas del reloj, el momento será representado por un vector M_O perpendicular al plano de la figura y que apunta hacia adentro del plano del papel. Este hecho se expresa escribiendo

$$M_O = 1\,200 \text{ lb} \cdot \text{in.} \downarrow \quad \blacktriangleleft$$



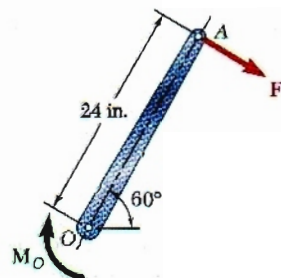
b) Fuerza horizontal. En este caso se tiene que

$$d = (24 \text{ in.}) \sin 60^\circ = 20.8 \text{ in.}$$

Como el momento con respecto a O debe ser igual a $1\,200 \text{ lb} \cdot \text{in.}$, se escribe

$$\begin{aligned} M_O &= Fd \\ 1\,200 \text{ lb} \cdot \text{in.} &= F(20.8 \text{ in.}) \\ F &= 57.7 \text{ lb} \end{aligned}$$

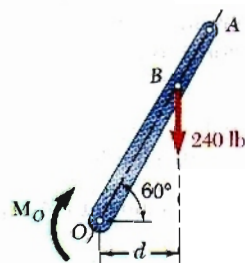
$$F = 57.7 \text{ lb} \rightarrow \quad \blacktriangleleft$$



c) Fuerza mínima. Como $M_O = Fd$, el mínimo valor de F se obtiene cuando d es máximo. Se selecciona la fuerza perpendicular a OA y se observa que $d = 24 \text{ in.}$; entonces

$$\begin{aligned} M_O &= Fd \\ 1\,200 \text{ lb} \cdot \text{in.} &= F(24 \text{ in.}) \\ F &= 50 \text{ lb} \end{aligned}$$

$$F = 50 \text{ lb} \angle 30^\circ \quad \blacktriangleleft$$



d) Fuerza vertical de 240 lb. En este caso, $M_O = Fd$ proporciona la siguiente relación

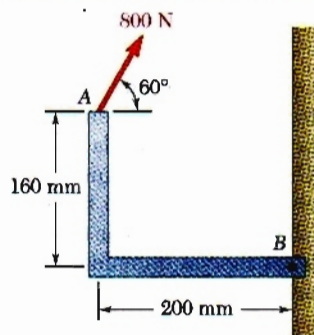
$$1\,200 \text{ lb} \cdot \text{in.} = (240 \text{ lb})d \quad d = 5 \text{ in.}$$

pero

$$OB \cos 60^\circ = d$$

$$OB = 10 \text{ in.} \quad \blacktriangleleft$$

e) Ninguna de las fuerzas consideradas en los incisos *b*), *c*) y *d*) es equivalente a la fuerza original de 100 lb. A pesar de que estas fuerzas tienen el mismo momento con respecto a O , sus componentes en x y y son diferentes. En otras palabras, a pesar de que cada una de las fuerzas hace rotar la flecha de la misma forma, cada una ocasiona que la palanca jale a la flecha en una forma distinta.



PROBLEMA RESUELTO 3.2

Una fuerza de 800 N actúa sobre la ménsula, como se muestra en la figura. Determine el momento de la fuerza con respecto a B.

SOLUCIÓN

El momento M_B de la fuerza F con respecto a B se obtiene a través del producto vectorial

$$\mathbf{M}_B = \mathbf{r}_{A/B} \times \mathbf{F}$$

desde $\mathbf{r}_{A/B}$ es el vector trazado desde B hasta A. Al descomponer a $\mathbf{r}_{A/B}$ y a F en sus componentes rectangulares, se tiene que

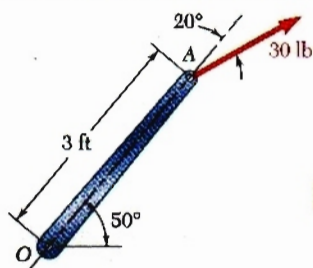
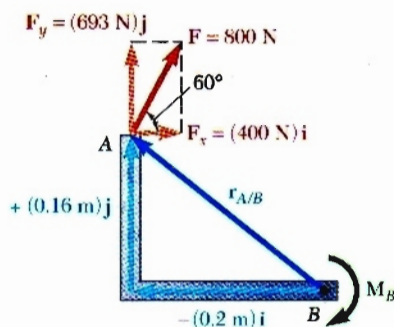
$$\begin{aligned}\mathbf{r}_{A/B} &= -(0.2 \text{ m})\mathbf{i} + (0.16 \text{ m})\mathbf{j} \\ \mathbf{F} &= (800 \text{ N}) \cos 60^\circ \mathbf{i} + (800 \text{ N}) \sin 60^\circ \mathbf{j} \\ &= (400 \text{ N})\mathbf{i} + (693 \text{ N})\mathbf{j}\end{aligned}$$

Recordando las relaciones (3.7) para los productos vectoriales de los vectores unitarios (sección 3.5), se obtiene

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_B &= \mathbf{r}_{A/B} \times \mathbf{F} = [-(0.2 \text{ m})\mathbf{i} + (0.16 \text{ m})\mathbf{j}] \times [(400 \text{ N})\mathbf{i} + (693 \text{ N})\mathbf{j}] \\ &= -(138.6 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k} - (64.0 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k} \\ &= -(202.6 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k}\end{aligned}$$

$$\mathbf{M}_B = 203 \text{ N} \cdot \text{m} \downarrow$$

El momento M_B es un vector perpendicular al plano de la figura y apunta hacia *adentro* del plano del papel.



PROBLEMA RESUELTO 3.3

Una fuerza de 30 lb actúa sobre el extremo de una palanca de 3 ft, como se muestra en la figura. Determine el momento de la fuerza con respecto a O.

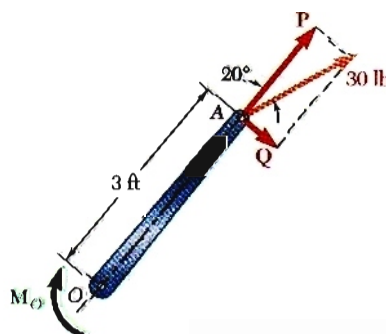
SOLUCIÓN

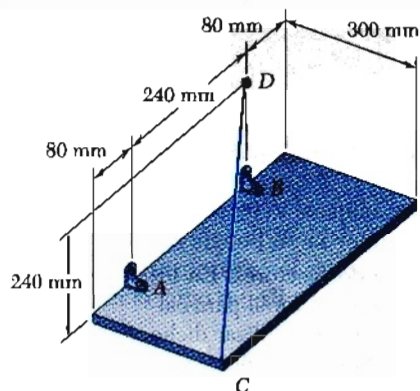
La fuerza se reemplaza por dos componentes, una componente P en la dirección de OA y otra componente Q perpendicular a OA . Como O se encuentra en la línea de acción de P , el momento de P con respecto a O es igual a cero y el momento de la fuerza de 30 lb se reduce al momento de Q , que tiene el sentido de las manecillas del reloj y, por consiguiente, se representa por un escalar negativo.

$$\begin{aligned}Q &= (30 \text{ lb}) \sin 20^\circ = 10.26 \text{ lb} \\ M_O &= -Q(3 \text{ ft}) = -(10.26 \text{ lb})(3 \text{ ft}) = -30.8 \text{ lb} \cdot \text{ft}\end{aligned}$$

Como el valor obtenido para el escalar M_O es negativo, el momento M_O apunta hacia *adentro* del plano del papel. Así, se escribe

$$\mathbf{M}_O = 30.8 \text{ lb} \cdot \text{ft} \downarrow$$





PROBLEMA RESUELTO 3.4

Una placa rectangular está apoyada por ménsulas en A y B y por un alambre CD. Se sabe que la tensión en el alambre es de 200 N, determine el momento con respecto a A de la fuerza ejercida por el alambre en el punto C.

SOLUCIÓN

El momento M_A de la fuerza F ejercida por el alambre en el punto C con respecto a A, se obtiene a partir del producto vectorial

$$M_A = r_{C/A} \times F \quad (1)$$

donde $r_{C/A}$ es el vector trazado desde A hasta C,

$$r_{C/A} = \overrightarrow{AC} = (0.3 \text{ m})\mathbf{i} + (0.08 \text{ m})\mathbf{k} \quad (2)$$

y F es la fuerza de 200 N dirigida a lo largo de CD. Al introducir el vector unitario $\lambda = \overrightarrow{CD}/CD$, se escribe

$$F = F\lambda = (200 \text{ N}) \frac{\overrightarrow{CD}}{CD} \quad (3)$$

Al descomponer al vector \overrightarrow{CD} en sus componentes rectangulares, se tiene

$$\overrightarrow{CD} = -(0.3 \text{ m})\mathbf{i} + (0.24 \text{ m})\mathbf{j} - (0.32 \text{ m})\mathbf{k} \quad CD = 0.50 \text{ m}$$

Si se sustituye este resultado en (3) se obtiene

$$\begin{aligned} F &= \frac{200 \text{ N}}{0.50 \text{ m}} [-(0.3 \text{ m})\mathbf{i} + (0.24 \text{ m})\mathbf{j} - (0.32 \text{ m})\mathbf{k}] \\ &= -(120 \text{ N})\mathbf{i} + (96 \text{ N})\mathbf{j} - (128 \text{ N})\mathbf{k} \end{aligned} \quad (4)$$

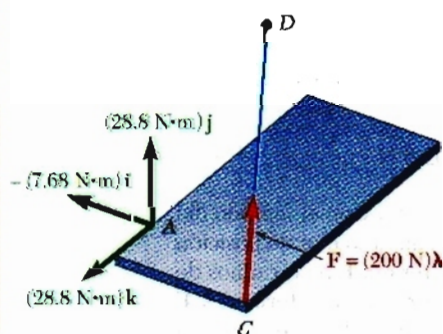
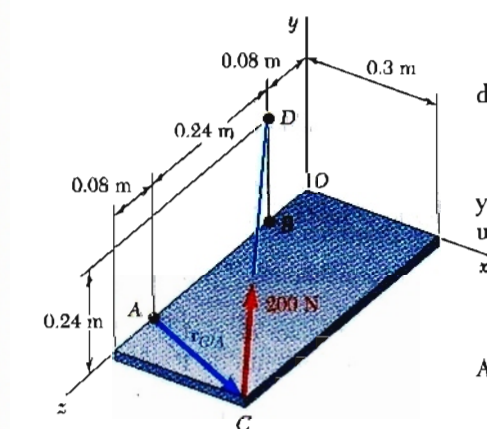
Sustituyendo $r_{C/A}$ y F en la ecuación (1), a partir de las ecuaciones (2) y (4) y recordando las relaciones (3.7) de la sección 3.5, se obtiene

$$\begin{aligned} M_A &= r_{C/A} \times F = (0.3\mathbf{i} + 0.08\mathbf{k}) \times (-120\mathbf{i} + 96\mathbf{j} - 128\mathbf{k}) \\ &= (0.3)(96)\mathbf{k} + (0.3)(-128)(-\mathbf{j}) + (0.08)(-120)\mathbf{j} + (0.08)(96)(-\mathbf{i}) \\ M_A &= -(7.68 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{i} + (28.8 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{j} + (28.8 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k} \end{aligned}$$

Solución alternativa. Como se mencionó en la sección 3.8, el momento M_A puede ser expresado en forma de determinante:

$$M_A = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_C - x_A & y_C - y_A & z_C - z_A \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0.3 & 0 & 0.08 \\ -120 & 96 & -128 \end{vmatrix}$$

$$M_A = -(7.68 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{i} + (28.8 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{j} + (28.8 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k}$$



RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En esta lección se presentó el *producto vectorial* o *producto cruz* de dos vectores. En los problemas que se presentan a continuación se puede utilizar el producto vectorial para calcular el *momento de una fuerza con respecto a un punto* y también, se puede utilizar dicho producto para determinar la *distancia perpendicular* desde un punto hasta una *línea*.

El momento de una fuerza \mathbf{F} con respecto al punto O de un cuerpo rígido se definió como

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (3.11)$$

donde \mathbf{r} es el vector de posición que va desde O hasta cualquier punto sobre la línea de acción de \mathbf{F} . Como el producto vectorial no es conmutativo, cuando se calcula un producto de este tipo es absolutamente necesario colocar a los vectores en el orden apropiado y que cada uno de dichos vectores tenga el sentido correcto. El momento \mathbf{M}_O es importante puesto que su magnitud es una medida de la tendencia de la fuerza \mathbf{F} para hacer que el cuerpo rígido rote alrededor de un eje dirigido a lo largo de \mathbf{M}_O .

1. Cálculo del momento \mathbf{M}_O de una fuerza en dos dimensiones. Se puede emplear uno de los siguientes procedimientos:

a) Usar la ecuación (3.12), $M_O = Fd$, la cual expresa la magnitud del momento como el producto de la magnitud de \mathbf{F} y la *distancia perpendicular* d desde O hasta la línea de acción de \mathbf{F} [problema resuelto 3.1].

b) Expresar a \mathbf{r} y \mathbf{F} en términos de sus componentes y evaluar formalmente el producto vectorial $\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$ [problema resuelto 3.2].

c) Descomponer a \mathbf{F} en sus componentes paralela y perpendicular al vector de posición \mathbf{r} , respectivamente. Sólo la componente perpendicular contribuye al momento de \mathbf{F} [problema resuelto 3.3].

d) Usar la ecuación (3.22), $M_O = M_z = xF_y - yF_x$. Cuando se aplica este método, el enfoque más simple consiste en tratar a las componentes escalares de \mathbf{r} y \mathbf{F} como si fueran positivas y, después, asignar por inspección el signo apropiado al momento producido por cada componente de la fuerza. Por ejemplo, al aplicar este método para resolver el problema resuelto 3.2, se observa que ambas componentes de la fuerza tienden a ocasionar una rotación en el sentido del movimiento de las manecillas del reloj alrededor del punto B . Por tanto, el momento de cada fuerza con respecto a B debe ser representado por un escalar negativo. Entonces, se tiene que el momento total está dado por

$$M_B = -(0.16 \text{ m})(400 \text{ N}) - (0.20 \text{ m})(693 \text{ N}) = -202.6 \text{ N} \cdot \text{m}$$

2. Cálculo del momento \mathbf{M}_O de una fuerza \mathbf{F} en tres dimensiones. Con el método del problema resuelto 3.4, el primer paso del proceso consiste en seleccionar al vector de posición \mathbf{r} que sea el más conveniente (el más simple). Después, se debe expresar a \mathbf{F} en términos de sus componentes rectangulares. El último paso consiste en evaluar el producto vectorial $\mathbf{r} \times \mathbf{F}$ para determinar el momento. En la mayoría de los problemas tridimensionales se encontrará que es más fácil calcular el producto vectorial con el uso de la forma de determinante.

3. Determinación de la distancia perpendicular d desde un punto A hasta una línea dada. Primero se supone que la fuerza \mathbf{F} de magnitud conocida F se encuentra a lo largo de la línea dada. Después se determina su momento con respecto a A formando el producto vectorial $\mathbf{M}_A = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$, y calculándolo como se indicó anteriormente. Entonces, se calcula su magnitud M_A . Por último, se sustituyen los valores de F y M_A en la ecuación $M_A = Fd$ y se resuelve para d .

Problemas

3.1 Una fuerza de 90 N se aplica a la varilla de control AB como indica la figura. Si la longitud de la varilla es de 225 mm, determine el momento de la fuerza respecto al punto B descomponiendo la fuerza en sus componentes a lo largo de AB y en una dirección perpendicular a AB .

3.2 Una fuerza de 90 N se aplica a la varilla de control AB como indica la figura. Si la longitud de la varilla es de 225 mm, determine el momento de la fuerza respecto al punto B descomponiendo la fuerza en sus componentes horizontal y vertical.

3.3 Una fuerza P de 3 lb se aplica a una palanca que controla la barra de una barredora de nieve. Determine el momento de P respecto a A cuando α es igual a 30° .

3.4 La fuerza P se aplica a una palanca que controla la barra de una barredora de nieve. Determine la magnitud y la dirección de la fuerza P mínima que tiene un momento de $19.5 \text{ lb} \cdot \text{in.}$ en sentido contrario al de las manecillas del reloj respecto a A .

3.5 Una fuerza P de 2.9 lb se aplica a una palanca que controla la barra de una barredora de nieve. Determine el valor de α si el momento de P respecto a A es en sentido contrario al de las manecillas del reloj y tiene una magnitud de $17 \text{ lb} \cdot \text{in.}$

3.6 Un rótulo está suspendido de dos cadenas AE y BF . Si la tensión en BF es de 200 N, determine *a*) el momento de la fuerza ejercida por la cadena en B respecto a A , *b*) la fuerza mínima aplicada en C que produce el mismo momento respecto a A .

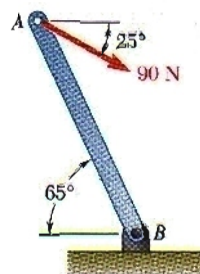


Figura P3.1 y P3.2

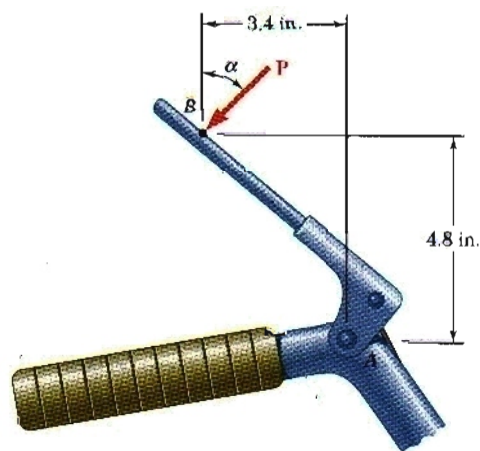


Figura P3.3, P3.4 y P3.5

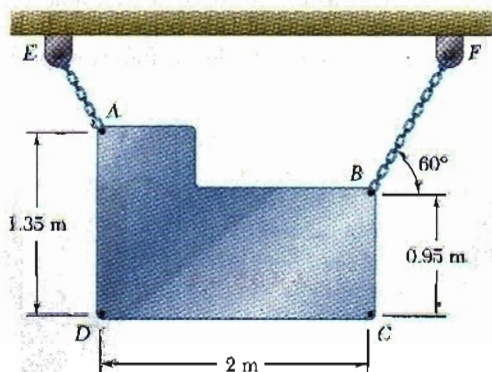


Figura P3.6 y P3.7

3.7 Un rótulo está suspendido de dos cadenas AE y BF . Si la tensión en BF es de 200 N, determine *a*) el momento de la fuerza ejercida por la cadena en B respecto a A , *b*) la magnitud y el sentido de la fuerza vertical aplicada en C que produce el mismo momento respecto de A , *c*) la fuerza mínima aplicada en B que produce el mismo momento respecto de A .

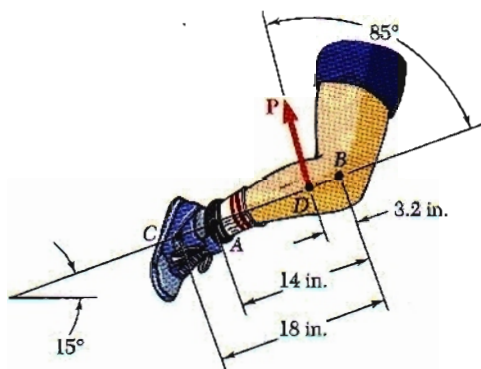


Figura P3.8

3.8 Un atleta se está ejercitando mientras carga en el tobillo, A, un peso de 5 lb, como indica la figura. Determine a) el momento del peso respecto a la flexión de la rodilla en el punto B, b) la magnitud de la fuerza P muscular que forma un momento de igual magnitud respecto a B, c) la fuerza F mínima aplicada en C que crea el mismo momento que el peso respecto a B.

3.9 Un malacate AB se usa para tensar cables a un poste. Si la tensión en el cable BC es de 260 lb y las longitudes a , b , d miden 8, 35 y 76 in., respectivamente, determine el momento, respecto a D, de la fuerza ejercida por el cable C mediante la descomposición en sus componentes horizontal y vertical de la fuerza aplicada en a) el punto C, b) el punto E.

3.10 Se debe aplicar una fuerza que produzca un momento de 7 840 lb · in. respecto a D para tensar el cable al poste CD. Si $a = 8$ in., $b = 35$ in. y $d = 112$ in., determine la tensión que debe desarrollarse en el cable del malacate AB para crear el momento requerido respecto al punto D.

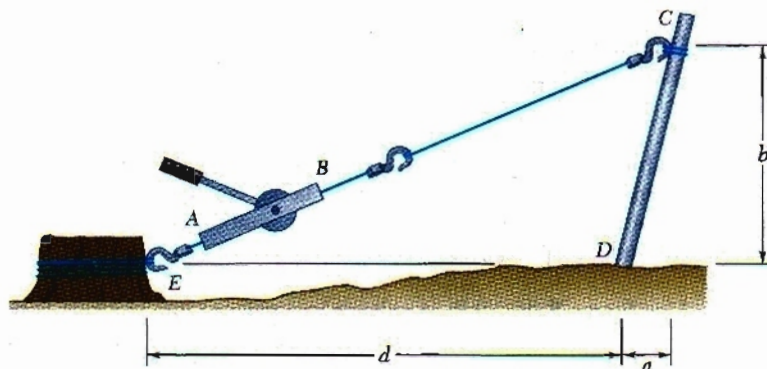


Figura P3.9, P3.10 y P3.11

3.11 Se debe aplicar una fuerza que produzca un momento de 1 152 N · m respecto a D para tensar el cable al poste CD. Si la capacidad del malacate AB es de 2 880 N, determine el valor mínimo de la distancia d necesaria para generar el momento especificado respecto a D, suponiendo que $a = 0.24$ m y $b = 1.05$ m.

3.12 y 3.13 La biela AB ejerce sobre la manivela BC una fuerza de 2.5 kN dirigida hacia abajo y hacia el lado izquierdo a lo largo de la línea central de AB. Determine el momento de esa fuerza respecto a C.

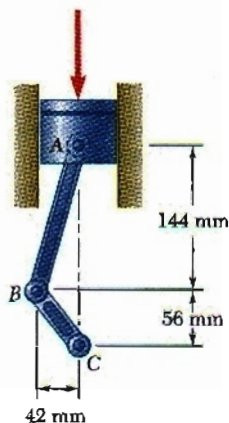


Figura P3.12

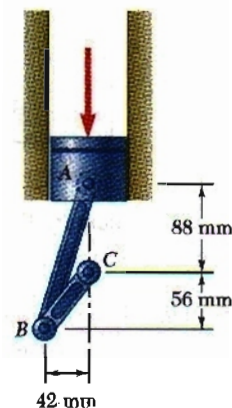


Figura P3.13

3.14 Un seguidor B circular con diámetro de 64 mm se sostiene contra la leva A como se muestra en la figura. Si la leva ejerce una fuerza con magnitud de 80 N sobre el seguidor a lo largo de la normal común BC , determine el momento de la fuerza respecto a la articulación colocada en D .

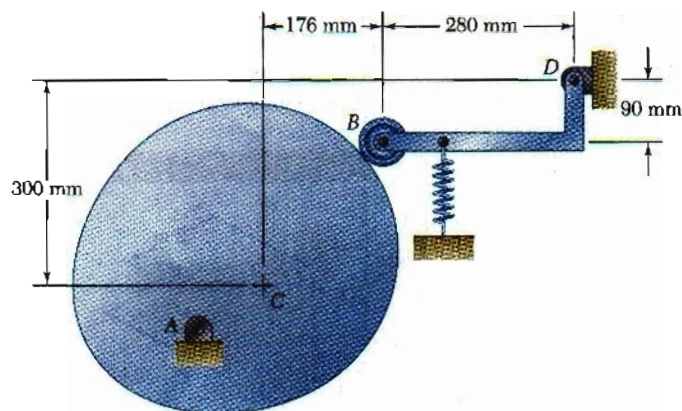


Figura P3.14

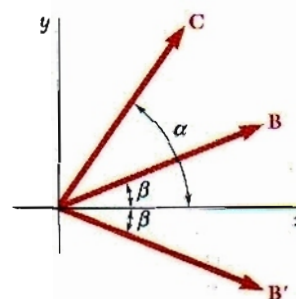


Figura P3.15

3.15 Obtenga los productos vectoriales $\mathbf{B} \times \mathbf{C}$ y $\mathbf{B}' \times \mathbf{C}$, donde $\mathbf{B} = \mathbf{B}'$, y use los resultados obtenidos para comprobar la identidad

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \sin (\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \sin (\alpha - \beta).$$

3.16 Una línea pasa por los puntos (630 mm, -225 mm) y (-210 mm, 270 mm). Determine la distancia perpendicular d medida desde la línea hasta el origen O del sistema coordenado.

3.17 Los vectores \mathbf{A} y \mathbf{B} están contenidos en el mismo plano. Determine el vector unitario normal al plano si \mathbf{A} y \mathbf{B} son iguales, respectivamente, a a) $12\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$ y $-3\mathbf{i} + 9\mathbf{j} - 7.5\mathbf{k}$, b) $-14\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$ y $3\mathbf{i} + 1.5\mathbf{j} = \mathbf{k}$.

3.18 Los vectores \mathbf{P} y \mathbf{Q} son dos lados adyacentes de un paralelogramo. Determine el área del paralelogramo si a) $\mathbf{P} = (3 \text{ in.})\mathbf{i} + (7 \text{ in.})\mathbf{j} - (2 \text{ in.})\mathbf{k}$ y $\mathbf{Q} = -(5 \text{ in.})\mathbf{i} + (1 \text{ in.})\mathbf{j} + (3 \text{ in.})\mathbf{k}$, b) $\mathbf{P} = (2 \text{ in.})\mathbf{i} - (4 \text{ in.})\mathbf{j} - (3 \text{ in.})\mathbf{k}$ y $\mathbf{Q} = (6 \text{ in.})\mathbf{i} - (1 \text{ in.})\mathbf{j} + (5 \text{ in.})\mathbf{k}$.

3.19 Determine el momento respecto al origen O de la fuerza $\mathbf{F} = (7.5 \text{ N})\mathbf{i} + (3 \text{ N})\mathbf{j} - (4.5 \text{ N})\mathbf{k}$ que actúa en el punto A . Suponga que el vector de posición de A es a) $\mathbf{r} = -(6 \text{ m})\mathbf{i} + (3 \text{ m})\mathbf{j} + (1.5 \text{ m})\mathbf{k}$, b) $\mathbf{r} = (2 \text{ m})\mathbf{i} - (0.75 \text{ m})\mathbf{j} - (1 \text{ m})\mathbf{k}$, c) $\mathbf{r} = -(2.5 \text{ m})\mathbf{i} - (1 \text{ m})\mathbf{j} + (1.5 \text{ m})\mathbf{k}$.

3.20 Determine el momento respecto al origen O de la fuerza $\mathbf{F} = (3 \text{ lb})\mathbf{i} - (6 \text{ lb})\mathbf{j} + (4 \text{ lb})\mathbf{k}$ que actúa en el punto A . Suponga que el vector de posición de A es a) $\mathbf{r} = -(7.5 \text{ ft})\mathbf{i} + (3 \text{ ft})\mathbf{j} - (6 \text{ ft})\mathbf{k}$, b) $\mathbf{r} = -(0.75 \text{ ft})\mathbf{i} + (1.5 \text{ ft})\mathbf{j} - (1 \text{ ft})\mathbf{k}$, c) $\mathbf{r} = -(8 \text{ ft})\mathbf{i} + (2 \text{ ft})\mathbf{j} - (14 \text{ ft})\mathbf{k}$.

3.21 Un pequeño bote cuelga de dos grúas, una de las cuales se muestra en la figura. La tensión en la línea $ABAD$ es de 369 N. Determine el momento, respecto a C , de la fuerza resultante \mathbf{R}_A ejercida sobre las grúas en el punto A .

3.22 Una fuerza de 36 N se aplica sobre la llave de torsión para enroscar la regadera. Si la línea de acción de la llave es paralela al eje x , determine el momento de la fuerza respecto de A .

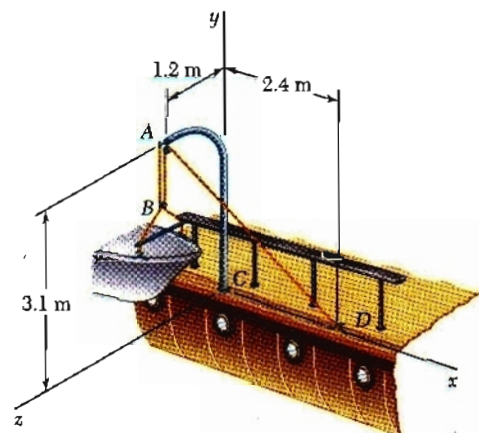


Figura P3.21

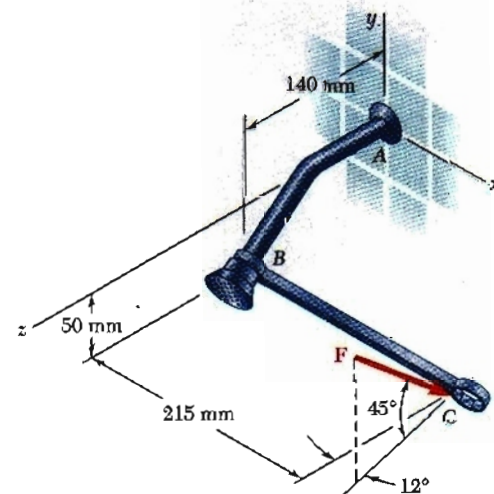


Figura P3.22

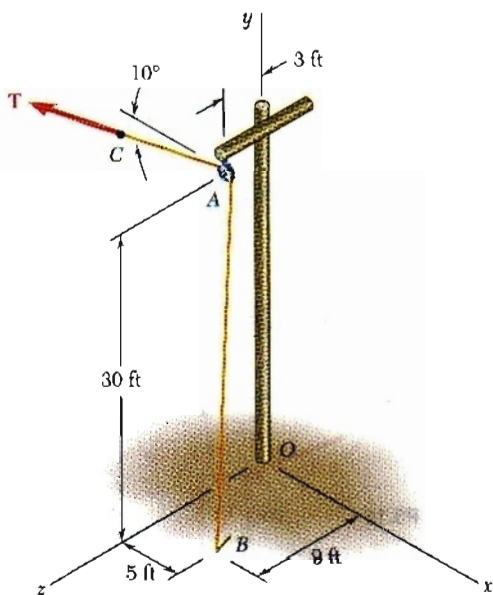


Figura P3.23

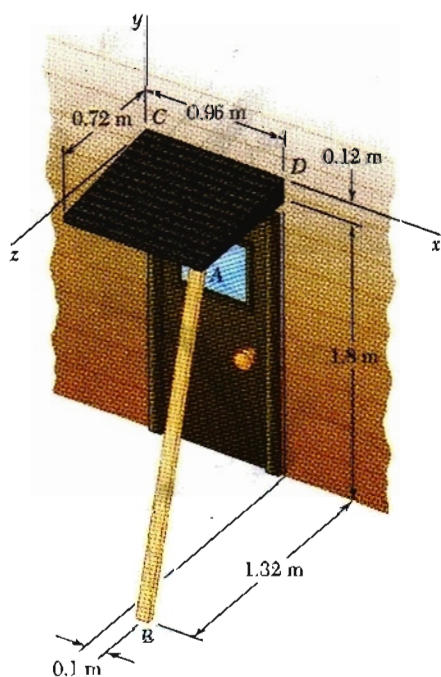


Figura P3.26

3.23 Antes de colocar un cable telefónico, la cuerda BAC se ata a una estaca situada en B y se pasa por una polea en A. Si el tramo AC de la cuerda pertenece a un plano paralelo al plano xy , y la magnitud de la tensión T en la cuerda es de 62 lb, determine el momento respecto a O de la fuerza resultante ejercida por la cuerda sobre la polea.

3.24 Una sección de una pared de concreto precolado se sostiene por medio de dos cables como se muestra en la figura. Si la tensión en cada cable, BD y FE , es de 900 y 675 N, respectivamente, determine el momento respecto al punto O de la fuerza ejercida por a) el cable BD , b) el cable FE .

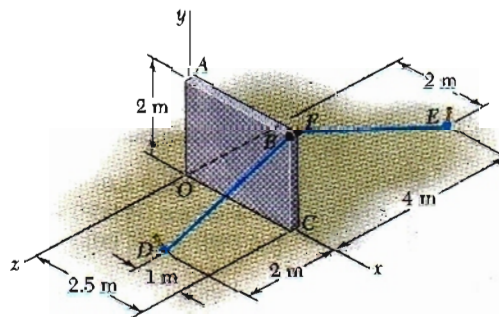


Figura P3.24

3.25 En un concurso de vencidas, uno de los competidores aplica una fuerza P sobre la mano de su oponente. Si $AB = 15.2$ in. y $BC = 16$ in., determine el momento de la fuerza respecto a C .

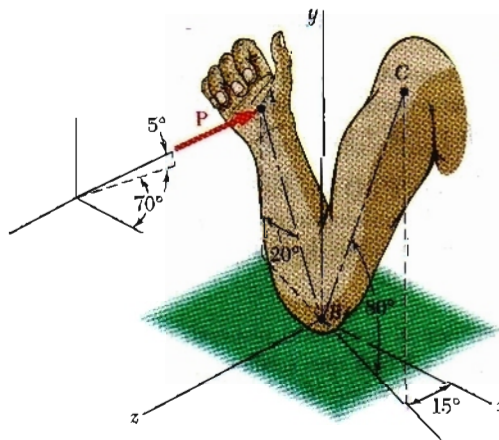


Figura P3.25

3.26 El puntal de madera AB se emplea temporalmente para sostener el techo en voladizo que se muestra en la figura. Si el puntal ejerce en A una fuerza de 228 N dirigida a lo largo de BA , determine el momento de esta fuerza respecto a C .

3.27 En el problema 3.21, determine la distancia perpendicular desde el punto C hasta el tramo AD de la línea $ABAD$.

3.28 En el problema 3.23, determine la distancia perpendicular desde el punto O hasta el tramo AC de la cuerda BAC .

3.29 En el problema 3.23, determine la distancia perpendicular desde el punto O hasta el tramo AB de la cuerda BAC .

3.30 En el problema 3.24, determine la distancia perpendicular desde el punto C hasta el cable BD .

3.31 En el problema 3.25, determine la distancia perpendicular desde el punto C hasta la línea de acción de la fuerza P .

3.32 En el problema 3.26, determine la distancia perpendicular desde el punto D hasta la línea que pasa por los puntos A y B .

3.33 En el problema 3.26, determine la distancia perpendicular desde el punto C hasta la línea que pasa por los puntos A y B .

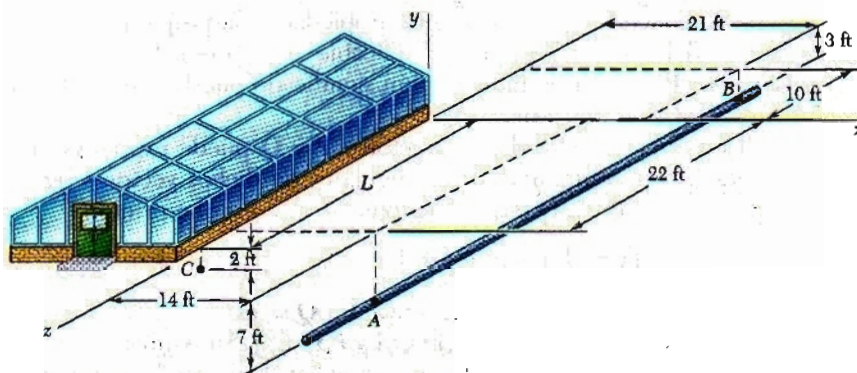


Figura P3.34

3.34 Un jardinero desea conectar un tubo hidráulico desde el punto C , que se encuentra en el cimientado de un invernadero de 30 ft de largo, hasta una tubería principal que pasa por los puntos A y B . Determine *a*) el valor de L que minimiza la longitud del tubo hidráulico requerido, *b*) la longitud del tubo requerido.

3.9. PRODUCTO ESCALAR DE DOS VECTORES

El *producto escalar* de dos vectores P y Q se define como el producto de las magnitudes de P y Q y el coseno del ángulo θ formado por P y Q (figura 3.19). El producto escalar de P y Q se denota mediante $P \cdot Q$. Entonces, se escribe

$$P \cdot Q = PQ \cos \theta \quad (3.24)$$

Advierta que la expresión recién definida no es un vector sino un *escalar*, lo cual explica el nombre de *producto escalar*; en virtud de la notación utilizada, $P \cdot Q$ también se conoce como el *producto punto* de los vectores P y Q .

A partir de su propia definición, se concluye que el producto escalar de dos vectores es *conmutativo*, esto es, que

$$P \cdot Q = Q \cdot P \quad (3.25)$$

Para demostrar que el producto escalar también es *distributivo*, se debe probar la relación

$$P \cdot (Q_1 + Q_2) = P \cdot Q_1 + P \cdot Q_2 \quad (3.26)$$

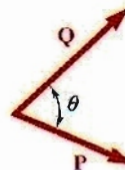


Figura 3.19

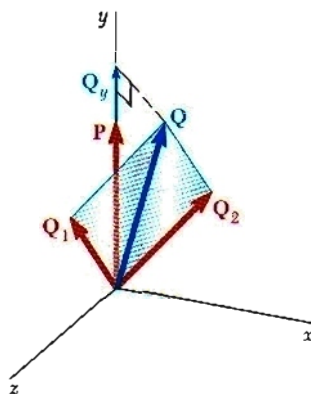


Figura 3.20

Sin perder la generalidad, se puede suponer que \mathbf{P} está dirigido a lo largo del eje y (figura 3.20). Al denotar por \mathbf{Q} la suma de \mathbf{Q}_1 y \mathbf{Q}_2 y por θ_y el ángulo que forma \mathbf{Q} con el eje y , el término del lado izquierdo de (3.26) se expresa de la siguiente forma:

$$\mathbf{P} \cdot (\mathbf{Q}_1 + \mathbf{Q}_2) = \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = PQ \cos \theta_y = PQ_y \quad (3.27)$$

donde Q_y es la componente y de \mathbf{Q} . De manera similar, el término del lado derecho de (3.26) se puede expresar como

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}_1 + \mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}_2 = P(Q_1)_y + P(Q_2)_y \quad (3.28)$$

Debido a que \mathbf{Q} es la suma de \mathbf{Q}_1 y \mathbf{Q}_2 , su componente y debe ser igual a la suma de las componentes en y de \mathbf{Q}_1 y \mathbf{Q}_2 . Por tanto, las expresiones obtenidas en (3.27) y (3.28) son iguales, con lo que queda demostrada la relación (3.26).

En lo concerniente a la tercera propiedad —la propiedad asociativa— se debe señalar que no es aplicable a los productos escalares. De hecho $(\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}) \cdot \mathbf{S}$ no tiene ningún significado puesto que $\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}$ no es un vector sino un escalar.

El producto escalar de dos vectores \mathbf{P} y \mathbf{Q} puede expresarse en términos de las componentes rectangulares de dichos vectores. Descomponiendo a \mathbf{P} y a \mathbf{Q} en sus componentes se escribe primero

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = (P_x \mathbf{i} + P_y \mathbf{j} + P_z \mathbf{k}) \cdot (Q_x \mathbf{i} + Q_y \mathbf{j} + Q_z \mathbf{k})$$

Con el uso de la propiedad distributiva, $\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}$ se expresa como la suma de productos escalares, como $P_x \mathbf{i} \cdot Q_x \mathbf{i}$ y $P_x \mathbf{i} \cdot Q_y \mathbf{j}$. Sin embargo, a partir de la definición del producto escalar se concluye que los productos escalares de los vectores unitarios son iguales a cero o a uno.

$$\begin{aligned} \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} &= 1 & \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} &= 1 & \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} &= 1 \\ \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} &= 0 & \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} &= 0 & \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} &= 0 \end{aligned} \quad (3.29)$$

Por tanto, la expresión obtenida para $\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}$ se reduce a

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z \quad (3.30)$$

En el caso particular, cuando \mathbf{P} y \mathbf{Q} son iguales

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{P} = P_x^2 + P_y^2 + P_z^2 = P^2 \quad (3.31)$$

Aplicaciones

1. **Ángulo formado por dos vectores dados.** Considérese que los dos vectores están dados en términos de sus componentes:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= P_x \mathbf{i} + P_y \mathbf{j} + P_z \mathbf{k} \\ \mathbf{Q} &= Q_x \mathbf{i} + Q_y \mathbf{j} + Q_z \mathbf{k} \end{aligned}$$

Para determinar el ángulo formado por estos dos vectores, se igualan las expresiones obtenidas para el producto escalar en (3.24) y (3.30) y se escribe

$$PQ \cos \theta = P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z$$

Resolviendo para $\cos \theta$, se tiene

$$\cos \theta = \frac{P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z}{PQ} \quad (3.32)$$

2. **Proyección de un vector sobre un eje dado.** Considérese un vector \mathbf{P} que forma un ángulo θ con un eje, o línea dirigida, OL (figura 3.21). La *proyección de \mathbf{P} sobre el eje OL* se define como el escalar

$$P_{OL} = P \cos \theta \quad (3.33)$$

Se observa que la proyección P_{OL} es igual en valor absoluto al valor de la longitud del segmento OA ; ésta será positiva si OA tiene el mismo sentido que el eje OL , esto es, si θ es agudo, y negativa en caso contrario. Si \mathbf{P} y OL forman un ángulo recto, la proyección de \mathbf{P} sobre OL es cero.

Considere ahora un vector \mathbf{Q} dirigido a lo largo de OL con el mismo sentido que OL (figura 3.22). El producto escalar de \mathbf{P} y \mathbf{Q} puede expresarse como

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = PQ \cos \theta = P_{OL}Q \quad (3.34)$$

por lo que se concluye que

$$P_{OL} = \frac{\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}}{Q} = \frac{P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z}{Q} \quad (3.35)$$

En el caso particular, cuando el vector seleccionado a lo largo de OL es el vector unitario $\boldsymbol{\lambda}$ (figura 3.23), se escribe

$$P_{OL} = \mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\lambda} \quad (3.36)$$

Al descomponer \mathbf{P} y $\boldsymbol{\lambda}$ en sus componentes rectangulares y recordar, de la sección 2.12, que las componentes de $\boldsymbol{\lambda}$ a lo largo de los ejes coordenados son iguales, respectivamente, a los cosenos directores de OL , la proyección de \mathbf{P} sobre OL se expresa como

$$P_{OL} = P_x \cos \theta_x + P_y \cos \theta_y + P_z \cos \theta_z \quad (3.37)$$

donde θ_x , θ_y y θ_z representan los ángulos que el eje OL forma con los ejes coordenados.

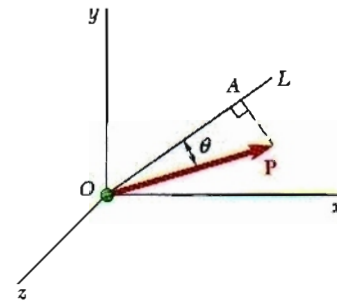


Figura 3.21

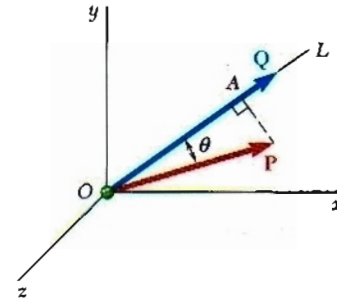


Figura 3.22

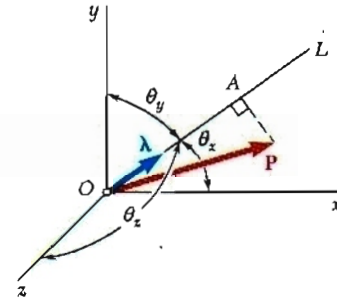


Figura 3.23

3.10. PRODUCTO TRIPLE MIXTO DE TRES VECTORES

Se define al *producto triple escalar* o producto triple mixto de tres vectores \mathbf{S} , \mathbf{P} y \mathbf{Q} como la expresión escalar

$$\mathbf{S} \cdot (\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) \quad (3.38)$$

la cual se obtiene formando el producto escalar de \mathbf{S} con el producto vectorial de \mathbf{P} y \mathbf{Q} .¹

¹En el capítulo 15 se presentará otro tipo de producto triple vectorial: el *producto triple vectorial* $\mathbf{S} \times (\mathbf{P} \times \mathbf{Q})$.

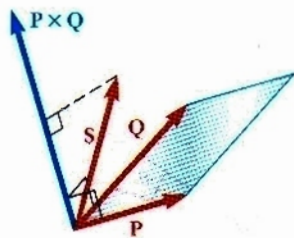


Figura 3.24

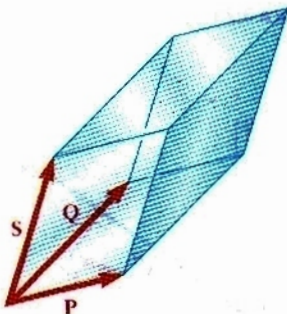


Figura 3.25

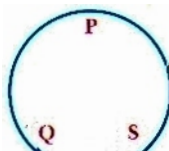


Figura 3.26

Al producto triple escalar de S , P y Q se le puede dar una interpretación geométrica simple (figura 3.24). En primer lugar, recuerde de la sección 3.4 que el vector $P \times Q$ es perpendicular al plano que contiene a P y a Q y que su magnitud es igual al área del paralelogramo que tiene por lados a P y a Q . Por otro lado, la ecuación (3.34) indica que el producto escalar de S y $P \times Q$ se puede obtener multiplicando la magnitud de $P \times Q$ (esto es, el área del paralelogramo definido por P y Q) por la proyección de S sobre el vector $P \times Q$ (esto es, por la proyección de S sobre la normal al plano que contiene al paralelogramo). Por tanto, el producto triple escalar es igual en valor absoluto al volumen del paralelepípedo que tiene por lados a los vectores S , P y Q (figura 3.25). Se debe señalar que el signo del producto triple escalar será positivo si S , P y Q forman una triada a mano derecha, y será negativo si éstos forman una triada a mano izquierda [esto es, $S \cdot (P \times Q)$ será negativo si se observa desde el extremo terminal de S , que la rotación que hace a P colineal con Q va en el sentido de las manecillas del reloj]. El producto triple escalar será igual a cero si S , P y Q son coplanares.

Como el paralelepípedo definido en el párrafo anterior es independiente del orden en que se tomen los tres vectores, todos los seis productos triples escalares que se pueden formar con S , P y Q tendrán el mismo valor absoluto, pero no el mismo signo. Se puede demostrar fácilmente que

$$\begin{aligned} S \cdot (P \times Q) &= P \cdot (Q \times S) = Q \cdot (S \times P) \\ &= -S \cdot (Q \times P) = -P \cdot (S \times Q) = -Q \cdot (P \times S) \end{aligned} \quad (3.39)$$

Ordenando las letras que representan a los tres vectores en un círculo y en sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj (figura 3.26), se observa que el signo del producto triple escalar permanece inalterado si se permutan los vectores en forma tal que éstos todavía se puedan leer en sentido contrario al de las manecillas del reloj. Se dice que una permutación de este tipo es una *permutación circular*. También, a partir de la ecuación (3.39) y de la propiedad conmutativa de los productos escalares, se concluye que el producto triple escalar de S , P y Q se puede definir tan bien con $S \cdot (P \times Q)$ como con $(S \times P) \cdot Q$.

El producto triple escalar de los vectores S , P y Q puede ser expresado en términos de las componentes rectangulares de estos vectores. Denotando a $P \times Q$ con V y con la fórmula (3.30) para expresar el producto escalar de S y V , se escribe

$$S \cdot (P \times Q) = S \cdot V = S_x V_x + S_y V_y + S_z V_z$$

Si se sustituyen las componentes de V a partir de las relaciones (3.9), se obtiene

$$\begin{aligned} S \cdot (P \times Q) &= S_x(P_y Q_z - P_z Q_y) + S_y(P_z Q_x - P_x Q_z) \\ &\quad + S_z(P_x Q_y - P_y Q_x) \end{aligned} \quad (3.40)$$

Esta expresión se puede escribir en forma más compacta si se observa que representa la expansión de un determinante:

$$S \cdot (P \times Q) = \begin{vmatrix} S_x & S_y & S_z \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix} \quad (3.41)$$

Aplicando las reglas que gobiernan a la permutación de renglones en un determinante, pueden verificarse fácilmente las relaciones (3.39) que fueron derivadas a partir de consideraciones geométricas.

3.11. MOMENTO DE UNA FUERZA CON RESPECTO A UN EJE DADO

Ahora que se ha incrementado el conocimiento del álgebra vectorial, se puede introducir un nuevo concepto: *momento de una fuerza con respecto a un eje*. Considérese nuevamente la fuerza \mathbf{F} que actúa sobre un cuerpo rígido y el momento \mathbf{M}_O de dicha fuerza con respecto a O (figura 3.27). Sea OL un eje a través de O ; el momento M_{OL} de \mathbf{F} con respecto a OL se define como la proyección OC del momento \mathbf{M}_O sobre el eje OL . Representando al vector unitario a lo largo de OL como λ y recordando, de las secciones 3.9 y 3.6, respectivamente, las expresiones (3.36) y (3.11) obtenidas para la proyección de un vector sobre un eje dado y para el momento \mathbf{M}_O de una fuerza \mathbf{F} , se escribe

$$M_{OL} = \lambda \cdot \mathbf{M}_O = \lambda \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) \quad (3.42)$$

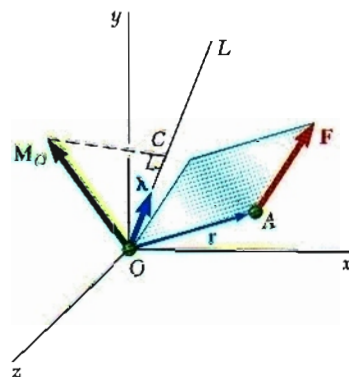


Figura 3.27

lo cual demuestra que el momento M_{OL} de \mathbf{F} con respecto al eje OL es el escalar que se obtiene formando el producto triple escalar de λ , \mathbf{r} y \mathbf{F} . Expresando a M_{OL} en forma de determinante, se escribe

$$M_{OL} = \begin{vmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \quad (3.43)$$

donde $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z =$ cosenos directores del eje OL

$x, y, z =$ coordenadas del punto de aplicación de \mathbf{F}

$F_x, F_y, F_z =$ componentes de la fuerza \mathbf{F}

El significado físico del momento M_{OL} de una fuerza \mathbf{F} con respecto al eje fijo OL se vuelve más evidente si se descompone a \mathbf{F} en dos componentes rectangulares \mathbf{F}_1 y \mathbf{F}_2 con \mathbf{F}_1 paralela a OL y \mathbf{F}_2 , contenida en un plano P perpendicular a OL (figura 3.28). En forma similar, descomponiendo a \mathbf{r} en dos componentes \mathbf{r}_1 y \mathbf{r}_2 y sustituyendo a \mathbf{F} y a \mathbf{r} en (3.42), se escribe

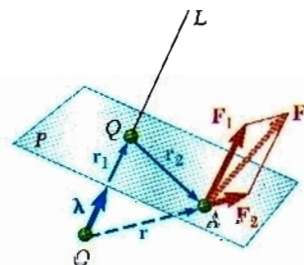


Figura 3.28

$$\begin{aligned} M_{OL} &= \lambda \cdot [(\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2) \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2)] \\ &= \lambda \cdot (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1) + \lambda \cdot (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_2) + \lambda \cdot (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_1) + \lambda \cdot (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2) \end{aligned}$$

Con excepción del último término del lado derecho, todos los productos triples escalares son iguales a cero, puesto que involucran a vectores que son coplanares cuando se trazan a partir de un origen común (sección 3.10), se tiene

$$M_{OL} = \lambda \cdot (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2) \quad (3.44)$$

El producto vectorial $\mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2$ es perpendicular al plano P y representa el momento de la componente \mathbf{F}_2 de \mathbf{F} con respecto al punto Q donde OL interseca a P . Por tanto, el escalar M_{OL} , el cual será positivo si $\mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_2$ y OL tienen el mismo sentido y negativo en caso contrario, mide la tendencia de \mathbf{F}_2 a hacer rotar el cuerpo rígido alrededor de OL . Como la otra componente \mathbf{F}_1 de \mathbf{F} no tiende a hacer rotar el cuerpo alrededor de OL , se concluye que el momento M_{OL} de \mathbf{F} con respecto a OL mide la tendencia de la fuerza \mathbf{F} de impartirle al cuerpo rígido un movimiento de rotación alrededor del eje fijo OL .

A partir de la definición del momento de una fuerza con respecto a un eje, se concluye que el momento de \mathbf{F} con respecto a un eje coordenado es igual a la componente de \mathbf{M}_O a lo largo de dicho eje. Al sustituir λ de manera sucesiva en la ecuación (3.42) por cada uno de los vectores unitarios \mathbf{i} , \mathbf{j} y \mathbf{k} , se observa que las expresiones así obtenidas para los momentos de \mathbf{F} con respecto a los ejes coordenados son iguales, respectivamente, a las expresiones obtenidas en la sección 3.8 para las componentes del momento \mathbf{M}_O de \mathbf{F} con respecto a O :

$$\begin{aligned} M_x &= yF_z - zF_y \\ M_y &= zF_x - xF_z \\ M_z &= xF_y - yF_x \end{aligned} \quad (3.18)$$

Se aprecia que de la misma forma que las componentes F_x , F_y y F_z de una fuerza \mathbf{F} que actúa sobre un cuerpo rígido miden, respectivamente, la tendencia de \mathbf{F} a mover el cuerpo rígido en las direcciones de x , y y z , los momentos M_x , M_y y M_z de \mathbf{F} con respecto a los ejes coordenados miden, respectivamente, la tendencia de \mathbf{F} a impartirle al cuerpo rígido un movimiento de rotación alrededor de los ejes x , y y z .

En general, el momento de una fuerza \mathbf{F} aplicada en A con respecto a un eje que no pasa a través del origen, se obtiene seleccionando un punto arbitrario B sobre dicho eje (figura 3.29) y determinando la proyección sobre el eje BL del momento \mathbf{M}_B de \mathbf{F} con respecto a B . Entonces, se escribe

$$\mathbf{M}_{BL} = \lambda \cdot \mathbf{M}_B = \lambda \cdot (\mathbf{r}_{A/B} \times \mathbf{F}) \quad (3.45)$$

donde $\mathbf{r}_{A/B} = \mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B$ representa al vector trazado desde B hasta A . Expresando a \mathbf{M}_{BL} en forma de determinante, se tiene

$$\mathbf{M}_{BL} = \begin{vmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \\ x_{A/B} & y_{A/B} & z_{A/B} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \quad (3.46)$$

donde λ_x , λ_y , λ_z = cosenos directores del eje BL

$$x_{A/B} = x_A - x_B \quad y_{A/B} = y_A - y_B \quad z_{A/B} = z_A - z_B$$

F_x , F_y , F_z = componentes de la fuerza \mathbf{F}

Se debe observar que el resultado obtenido es independiente del punto B seleccionado sobre el eje dado. De hecho, denotando con \mathbf{M}_{CL} el resultado obtenido con un punto C diferente, se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_{CL} &= \lambda \cdot [(\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_C) \times \mathbf{F}] \\ &= \lambda \cdot [(\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B) \times \mathbf{F}] + \lambda \cdot [(\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_C) \times \mathbf{F}] \end{aligned}$$

Pero como los vectores λ y $\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_C$ son colineales, el volumen del paralelepípedo que tiene por lados a los vectores λ , $\mathbf{r}_B - \mathbf{r}_C$ y \mathbf{F} es igual a cero, al igual que el producto triple escalar de dichos vectores (sección 3.10). Entonces, la expresión obtenida para \mathbf{M}_{CL} se reduce a su primer término, el cual es la expresión empleada anteriormente para definir a \mathbf{M}_{BL} . De manera adicional, a partir de la sección 3.6 se concluye que cuando se calcula el momento de \mathbf{F} con respecto a un eje dado, A puede ser cualquier punto a lo largo de la línea de acción de \mathbf{F} .

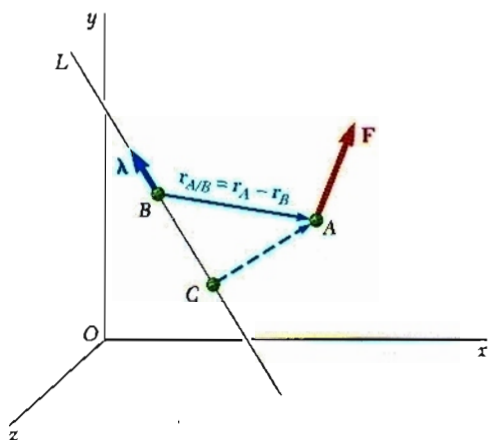
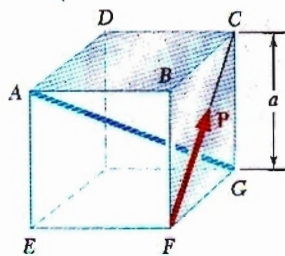
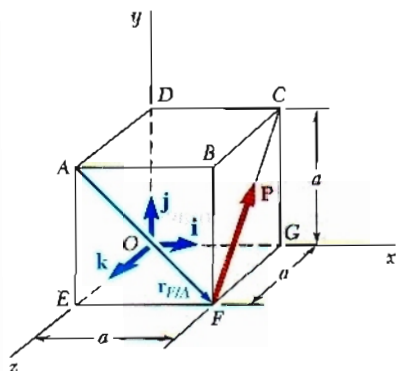


Figura 3.29



PROBLEMA RESUELTO 3.5

Sobre el cubo de lado a actúa una fuerza \mathbf{P} , como se muestra en la figura. Determine el momento de \mathbf{P} : a) con respecto a A, b) con respecto a la arista AB y c) con respecto a la diagonal AG del cubo; d) con el resultado del inciso c), determine la distancia perpendicular entre AG y FC.



SOLUCIÓN

a) Momento con respecto a A. Al seleccionar los ejes x, y y z como se muestra en la figura, la fuerza \mathbf{P} y el vector $\mathbf{r}_{F/A} = \overline{AF}$, trazado desde A hasta el punto de aplicación F de \mathbf{P} , se descomponen en sus componentes rectangulares.

$$\mathbf{r}_{F/A} = a\mathbf{i} - a\mathbf{j} = a(\mathbf{i} - \mathbf{j})$$

$$\mathbf{P} = (P/\sqrt{2})\mathbf{j} - (P/\sqrt{2})\mathbf{k} = (P/\sqrt{2})(\mathbf{j} - \mathbf{k})$$

El momento de \mathbf{P} con respecto a A es igual a

$$\mathbf{M}_A = \mathbf{r}_{F/A} \times \mathbf{P} = a(\mathbf{i} - \mathbf{j}) \times (P/\sqrt{2})(\mathbf{j} - \mathbf{k})$$

$$\mathbf{M}_A = (aP/\sqrt{2})(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}) \quad \blacktriangleleft$$

b) Momento con respecto a AB. Proyectando a \mathbf{M}_A sobre AB, se escribe

$$M_{AB} = \mathbf{i} \cdot \mathbf{M}_A = \mathbf{i} \cdot (aP/\sqrt{2})(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$$

$$M_{AB} = aP/\sqrt{2} \quad \blacktriangleleft$$

Se verifica que, como AB es paralela al eje x , M_{AB} también es la componente del momento \mathbf{M}_A .

c) Momento con respecto a la diagonal AG. El momento de \mathbf{P} con respecto a AG se obtiene proyectando a \mathbf{M}_A sobre AG. Denotando con λ el vector unitario a lo largo de AG, se tiene

$$\lambda = \frac{\overline{AG}}{AG} = \frac{a\mathbf{i} - a\mathbf{j} - a\mathbf{k}}{a\sqrt{3}} = (1/\sqrt{3})(\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k})$$

$$M_{AG} = \lambda \cdot \mathbf{M}_A = (1/\sqrt{3})(\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}) \cdot (aP/\sqrt{2})(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})$$

$$M_{AG} = (aP/\sqrt{6})(1 - 1 - 1) \quad \mathbf{M}_{AG} = -aP/\sqrt{6} \quad \blacktriangleleft$$

Método alternativo. El momento de \mathbf{P} con respecto a AG también se puede expresar en forma de determinante:

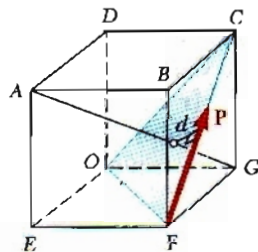
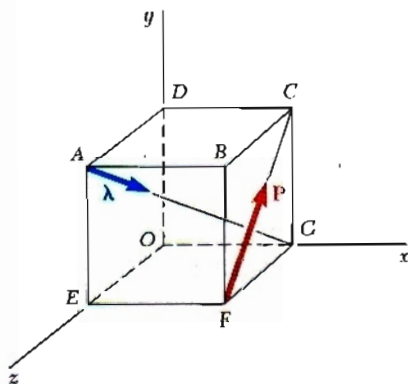
$$M_{AG} = \begin{vmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \\ x_{F/A} & y_{F/A} & z_{F/A} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} \\ a & -a & 0 \\ 0 & P/\sqrt{2} & -P/\sqrt{2} \end{vmatrix} = -aP/\sqrt{6}$$

d) Distancia perpendicular entre AG y FC. Primero se observa que \mathbf{P} es perpendicular a la diagonal AG. Esto se puede comprobar con el producto escalar $\mathbf{P} \cdot \lambda$ y verificar que dicho producto es igual a cero:

$$\mathbf{P} \cdot \lambda = (P/\sqrt{2})(\mathbf{j} - \mathbf{k}) \cdot (1/\sqrt{3})(\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}) = (P\sqrt{6})(0 - 1 + 1) = 0$$

Entonces, el momento M_{AG} puede ser expresado como $-Pd$, donde d es la distancia perpendicular desde AG hasta FC. (El signo negativo se usa puesto que para un observador ubicado en G, la rotación impartida al cubo por \mathbf{P} tiene el sentido del movimiento de las manecillas del reloj.) Recordando el valor encontrado para M_{AG} en el inciso c), se tiene

$$M_{AG} = -Pd = -aP/\sqrt{6} \quad d = a/\sqrt{6} \quad \blacktriangleleft$$



RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En los problemas correspondientes a esta sección, se aplicará el *producto escalar* o *producto punto* de dos vectores para determinar el *ángulo formado por dos vectores dados* y para *determinar la proyección de una fuerza sobre un eje dado*. También se utilizará el *producto triple escalar* de tres vectores para encontrar el *momento de una fuerza con respecto a un eje dado* y para *determinar la distancia perpendicular entre dos líneas*.

1. Cálculo del ángulo formado por dos vectores dados. Primero se expresa cada uno de los vectores en términos de sus componentes y se determinan las magnitudes de los dos vectores. Después, se obtiene el coseno del ángulo buscado con la división del producto escalar de los dos vectores entre el producto de sus respectivas magnitudes [ecuación (3.32)].

2. Cálculo de la proyección de un vector \mathbf{P} sobre un eje dado OL . En general, se comienza con la expresión en términos de sus componentes de \mathbf{P} y del vector unitario $\boldsymbol{\lambda}$ que define la dirección del eje. Se debe tener cuidado de que $\boldsymbol{\lambda}$ tenga el sentido correcto (esto es, de que $\boldsymbol{\lambda}$ esté dirigido desde O hasta L). Entonces, la proyección buscada es igual al producto escalar $\mathbf{P} \cdot \boldsymbol{\lambda}$. Sin embargo, si se conoce el ángulo θ que forman \mathbf{P} y $\boldsymbol{\lambda}$, la proyección también se puede calcular como $P \cos \theta$.

3. Determinación del momento M_{OL} de una fuerza con respecto a un eje dado OL . Se definió a M_{OL} como

$$M_{OL} = \boldsymbol{\lambda} \cdot \mathbf{M}_O = \boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) \quad (3.42)$$

donde $\boldsymbol{\lambda}$ es el vector unitario a lo largo de OL y \mathbf{r} es el vector de posición *desde cualquier punto sobre la línea OL hasta cualquier punto sobre la línea de acción de \mathbf{F}* . Como fue el caso para el momento de una fuerza con respecto a un punto, elegir el vector de posición más conveniente simplificará los cálculos. Además, también se debe recordar la advertencia de la lección anterior: los vectores \mathbf{r} y \mathbf{F} deben tener el sentido correcto y ser colocados en la fórmula en el orden apropiado. El procedimiento que se debe seguir cuando se calcula el momento de una fuerza con respecto a un eje se ilustra en el inciso c) del problema resuelto 3.5. Los dos pasos esenciales en este procedimiento son: expresar primero a $\boldsymbol{\lambda}$, \mathbf{r} y \mathbf{F} en términos de sus componentes rectangulares para después evaluar el producto triple escalar $\boldsymbol{\lambda} \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F})$ con el fin de determinar el momento con respecto al eje. En la mayoría de los problemas tridimensionales, la forma más conveniente para calcular el producto triple escalar es emplear un determinante.

Como se mencionó anteriormente, cuando $\boldsymbol{\lambda}$ está dirigido a lo largo de uno de los ejes coordenados, M_{OL} es igual al componente escalar de \mathbf{M}_O a lo largo de ese eje.

4. Determinación de la distancia perpendicular entre dos líneas. Se debe recordar que la componente perpendicular F_2 de la fuerza \mathbf{F} es la que tiende a hacer que el cuerpo rígido gire alrededor de un eje dado OL (figura 3.28). Entonces se concluye que

$$M_{OL} = F_2 d$$

donde M_{OL} es el momento de \mathbf{F} alrededor del eje OL y d es la distancia perpendicular entre OL y la línea de acción de \mathbf{F} . Esta última ecuación proporciona una técnica simple para determinar d . Primero, supóngase que la fuerza \mathbf{F} de magnitud conocida F se encuentra a lo largo de una de las líneas dadas y que el vector unitario λ se ubica a lo largo de la otra línea. Después, calcule el momento M_{OL} de la fuerza \mathbf{F} con respecto a la segunda línea con el método que se presentó en los párrafos anteriores. La magnitud de la componente paralela de \mathbf{F} , F_1 se obtiene utilizando el producto escalar:

$$F_1 = \mathbf{F} \cdot \lambda$$

El valor de F_2 se determina a partir de

$$F_2 = \sqrt{F^2 - F_1^2}$$

Por último, se sustituyen los valores de M_{OL} y F_2 en la ecuación $M_{OL} = F_2 d$ y se resuelve para d .

Ahora se puede comprender que el cálculo de la distancia perpendicular en el inciso *d*) del problema resuelto 3.5 se simplificó debido a que \mathbf{P} era perpendicular a la diagonal AG . Como, en general, las dos líneas dadas no serán perpendiculares, la técnica recién descrita se debe emplear cuando se desee determinar la distancia perpendicular entre ellas.

Problemas

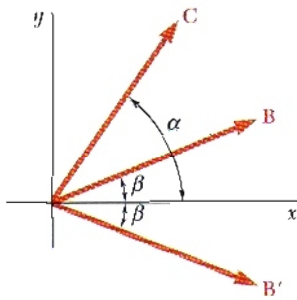


Figura P3.36

3.35 Dados los vectores $\mathbf{P} = -4\mathbf{i} + 8\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, $\mathbf{Q} = 9\mathbf{i} - \mathbf{j} - 7\mathbf{k}$, y $\mathbf{S} = 5\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, encuentre los productos escalares $\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}$, $\mathbf{P} \cdot \mathbf{S}$ y $\mathbf{Q} \cdot \mathbf{S}$.

3.36 Obtenga los productos escalares $\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}$ y $\mathbf{B}' \cdot \mathbf{C}$, donde $\mathbf{B} = \mathbf{B}'$, y utilice los resultados obtenidos para demostrar la identidad

$$\cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2} \cos (\alpha + \beta) + \frac{1}{2} \cos (\alpha - \beta).$$

3.37 Se utilizan tres cables para sostener un contenedor como se muestra en la figura. Determine el ángulo formado por los cables \mathbf{AB} y \mathbf{AD} .

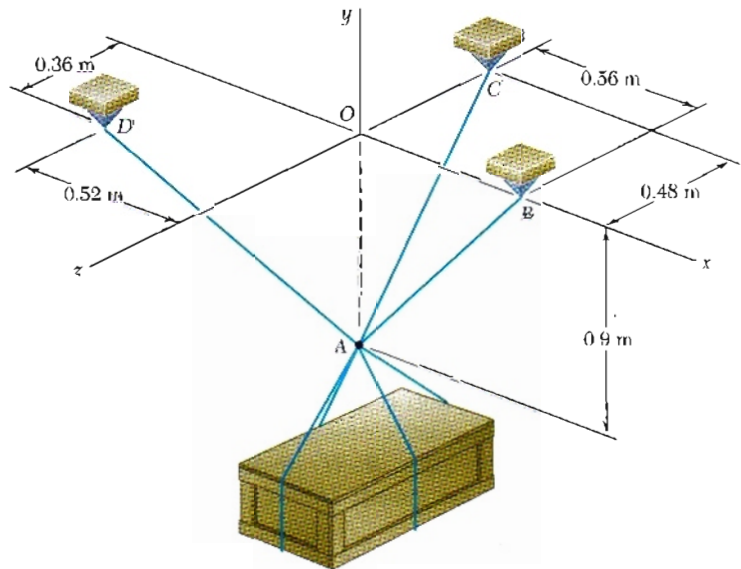


Figura P3.37 y P3.38

3.38 Para sostener un contenedor, como se muestra en la figura, se utilizan tres cables. Determine el ángulo formado por los cables \mathbf{AC} y \mathbf{AD} .

3.39 Los elementos \mathbf{AB} , \mathbf{BC} y \mathbf{CD} del marco de acero mostrado en la figura están unidos en \mathbf{B} y \mathbf{C} , asegurados mediante los cables \mathbf{EF} y \mathbf{EG} . Si \mathbf{E} es el punto medio de \mathbf{BC} y la tensión en el cable \mathbf{EF} es de 110 lb, determine a) el ángulo entre \mathbf{EF} y el elemento \mathbf{BC} , b) la proyección sobre \mathbf{BC} de la fuerza ejercida por el cable \mathbf{EF} en el punto \mathbf{E} .

3.40 Los elementos \mathbf{AB} , \mathbf{BC} y \mathbf{CD} del marco de acero mostrado en la figura están unidos en \mathbf{B} y \mathbf{C} , asegurados mediante los cables \mathbf{EF} y \mathbf{EG} . Si \mathbf{E} es el punto medio de \mathbf{BC} y la tensión en el cable \mathbf{EG} es de 178 lb, determine a) el ángulo entre \mathbf{EG} y el elemento \mathbf{BC} , b) la proyección sobre \mathbf{BC} de la fuerza ejercida por el cable \mathbf{EG} en el punto \mathbf{E} .

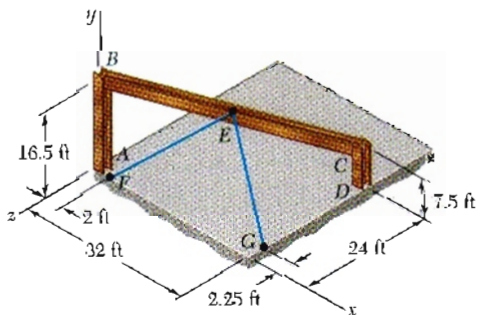


Figura P3.39 y P3.40

3.41 En la figura se muestra un mástil y parte de los aparejos de un velero. Los elementos CD y EF pertenecen al mismo plano, CD tiene longitud de 7.5 m y forma un ángulo de 45° con una línea vertical que pasa por C . Si cuando $\theta = 15^\circ$ la tensión en la cuerda AB es de 230 N, determine *a*) el ángulo entre las cuerdas AB y BD , *b*) la proyección sobre BD de la fuerza ejercida por la cuerda AB en el punto B .

3.42 En la figura se muestra un mástil y parte de los aparejos de un velero. Los elementos CD and EF pertenecen al mismo plano, CD tiene longitud de 7.5 m y forma un ángulo de 45° con una línea vertical que pasa por C . Si cuando $\theta = 10^\circ$ la tensión en la cuerda BD es de 250 N, determine *a*) el ángulo entre la cuerda BD y el arpon CD , *b*) la proyección sobre CD de la fuerza ejercida por la cuerda BD en el punto D .

3.43 Determine el volumen del paralelepípedo de la figura 3.25 si *a*) $\mathbf{P} = (3 \text{ in.})\mathbf{i} - (4 \text{ in.})\mathbf{j} + (1 \text{ in.})\mathbf{k}$, $\mathbf{Q} = -(7 \text{ in.})\mathbf{i} + (6 \text{ in.})\mathbf{j} - (8 \text{ in.})\mathbf{k}$ y $\mathbf{S} = (9 \text{ in.})\mathbf{i} - (2 \text{ in.})\mathbf{j} - (3 \text{ in.})\mathbf{k}$, *b*) $\mathbf{P} = -(5 \text{ in.})\mathbf{i} - (7 \text{ in.})\mathbf{j} + (4 \text{ in.})\mathbf{k}$, $\mathbf{Q} = (6 \text{ in.})\mathbf{i} - (2 \text{ in.})\mathbf{j} + (5 \text{ in.})\mathbf{k}$, y $\mathbf{S} = -(4 \text{ in.})\mathbf{i} + (8 \text{ in.})\mathbf{j} - (9 \text{ in.})\mathbf{k}$.

3.44 Dados los vectores $\mathbf{P} = -3\mathbf{i} - 7\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$, $\mathbf{Q} = -2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ y $\mathbf{S} = 8\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$, determine el valor de S_y para el que los tres vectores son coplanares.

3.45 La plataforma rectangular tiene bisagras en A y B y se sostiene mediante un cable que pasa, sin fricción, por un gancho colocado en E . Si la tensión en el cable es de 1 349 N, determine el momento de la fuerza ejercida por el cable en C respecto a cada uno de los ejes coordenados.

3.46 La plataforma rectangular tiene bisagras en A y B y se sostiene mediante un cable que pasa, sin fricción, por un gancho colocado en E . Si la tensión en el cable es de 1 349 N, determine el momento de la fuerza ejercida por el cable en D respecto a cada uno de los ejes coordenados.

3.47 Una cerca consiste en postes de madera y un cable de acero sujeto a cada poste y anclado al suelo en los puntos A y D . Si la suma de momentos, respecto al eje z , de las fuerzas ejercidas por el cable sobre los postes ubicados en B y C es de $-48 \text{ lb} \cdot \text{ft}$, determine la magnitud de T_{CD} cuando $T_{BA} = 14 \text{ lb}$.

3.48 Una cerca consiste en postes de madera y un cable de acero sujeto a cada poste y anclado al suelo en los puntos A y D . Si la suma de momentos, respecto al eje y , de las fuerzas ejercidas por el cable sobre los postes ubicados en B y C es de $156 \text{ lb} \cdot \text{ft}$, determine la magnitud de T_{BA} cuando $T_{CD} = 7.5 \text{ lb}$.

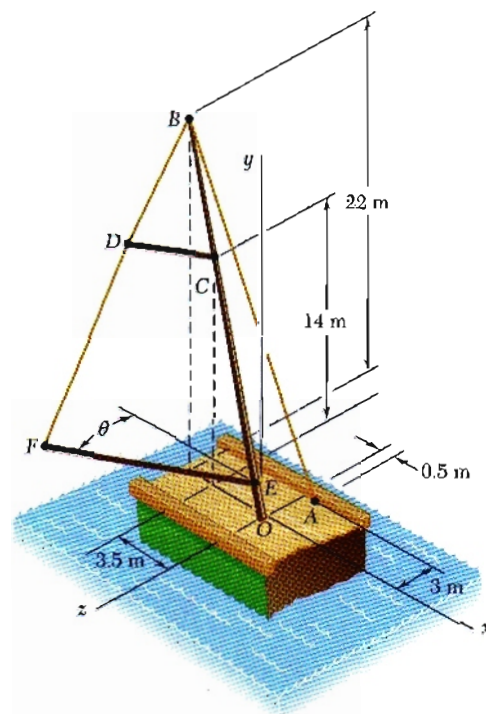


Figura P3.41 y P3.42

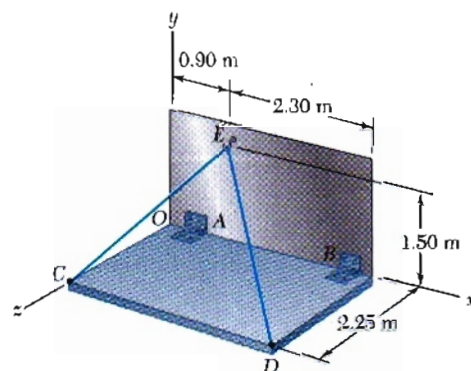


Figura P3.45 y P3.46

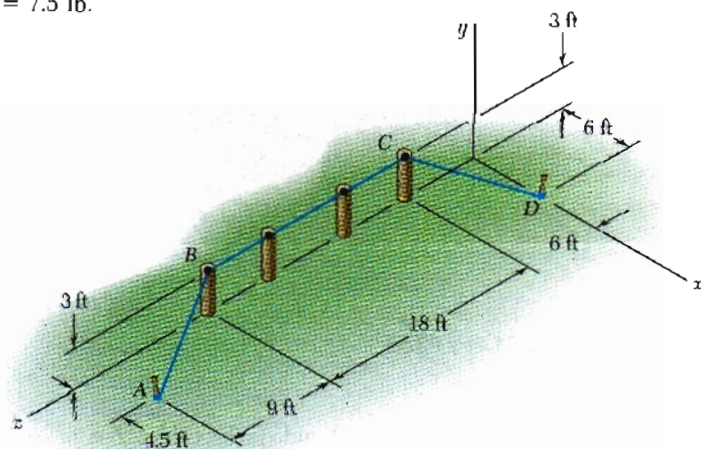


Figura P3.47 y P3.48

3.49 Una fuerza \mathbf{P} se aplica a la palanca de un tornillo de presión. Si \mathbf{P} pertenece a un plano paralelo al plano yz y $M_x = 26 \text{ N} \cdot \text{m}$, $M_y = -23 \text{ N} \cdot \text{m}$ y $M_z = -4 \text{ N} \cdot \text{m}$, determine la magnitud de \mathbf{P} y los valores de ϕ y θ .

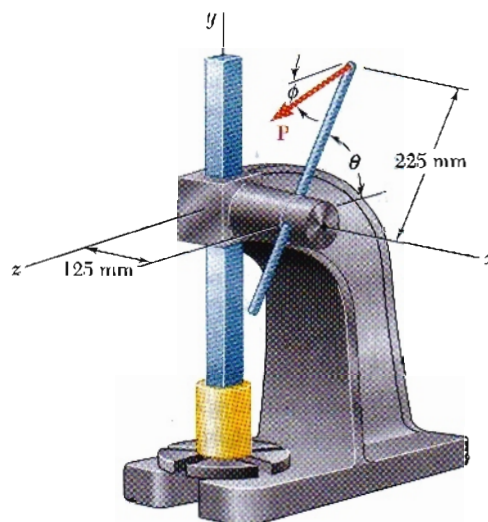


Figura P3.49 y P3.50

3.50 Una fuerza \mathbf{P} se aplica a la palanca de un tornillo de presión. Si \mathbf{P} pertenece a un plano paralelo al plano yz y $M_y = -20 \text{ N} \cdot \text{m}$ y $M_z = -3.5 \text{ N} \cdot \text{m}$, determine el momento de M_x de \mathbf{P} respecto al eje x cuando $\theta = 60^\circ$.

3.51 El poste utilitario BC está retenido por el cable AB como se muestra en la figura. Si la magnitud de la fuerza ejercida por el cable en B es de 70 lb, y el momento de esa fuerza respecto al eje x es de $-763 \text{ lb} \cdot \text{ft}$, determine la longitud del poste.

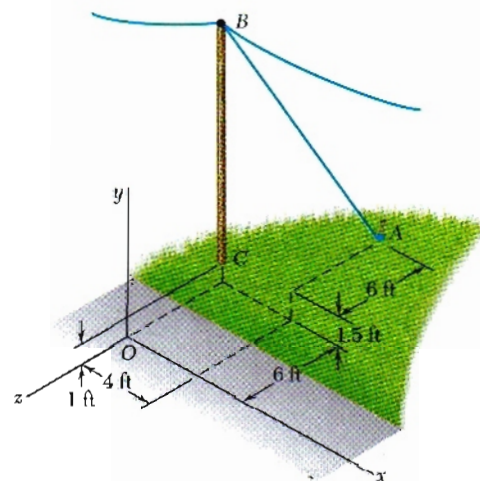


Figura P3.51 y P3.52

3.52 El poste utilitario BC está retenido por el cable AB como se muestra en la figura. Si los momentos de la fuerza ejercida por el cable en el punto B respecto a los ejes x y z son, respectivamente, de $-900 \text{ lb} \cdot \text{ft}$ y $-315 \text{ lb} \cdot \text{ft}$, determine la longitud del poste.

3.53 El marco ACD está articulado en A y D y se sostiene mediante un cable, el cual pasa por un anillo colocado en B y está unido a ganchos en G y H . Si la tensión en el cable es de $1\,125\text{ N}$, determine el momento, respecto a la diagonal AD , de la fuerza ejercida sobre el marco por el tramo BH del cable.

3.54 El marco ACD está articulado en A y D y se sostiene mediante un cable, el cual pasa por un anillo colocado en B y está unido a ganchos en G y H . Si la tensión en el cable es de $1\,125\text{ N}$, determine el momento, respecto a la diagonal AD , de la fuerza ejercida sobre el marco por el tramo BG del cable.

3.55 La sección $ABCD$ de una pasarela inclinada en voladizo mide 2.4 m de ancho y está parcialmente sostenida por los elementos EF y GH . Si la fuerza compresiva ejercida por el elemento EF sobre la pasarela en el punto F es de 24.3 kN , determine el momento de esa fuerza respecto al borde AD .

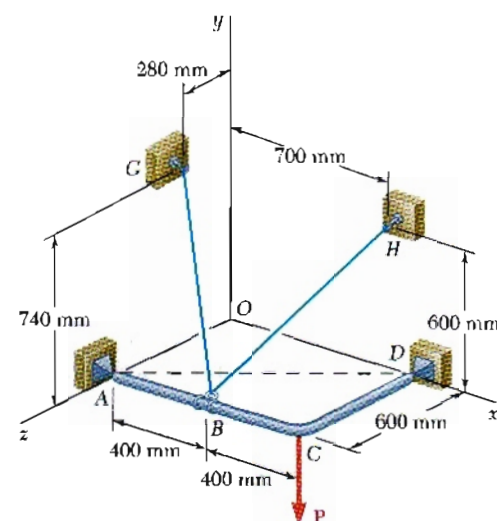


Figura P3.53 y P3.54

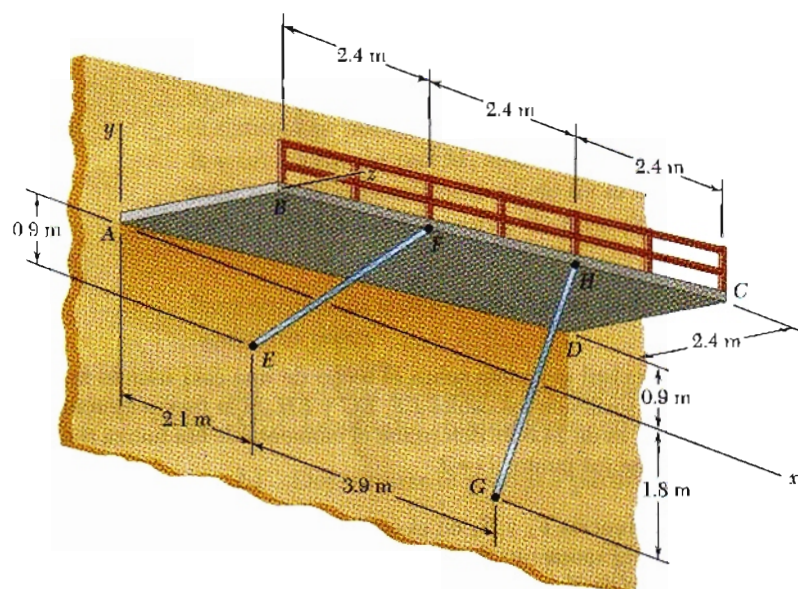


Figura P3.55 y P3.56

3.56 La sección $ABCD$ de una pasarela inclinada en voladizo mide 2.4 m de ancho y está parcialmente sostenida por los elementos EF y GH . Si la fuerza compresiva ejercida por el elemento GH sobre la pasarela en el punto H es de 21.3 kN , determine el momento de esa fuerza respecto al borde AD .

3.57 Un tetraedro rectangular tiene seis lados de longitud a . Si una fuerza \mathbf{P} se aplica a lo largo del borde BC como indica la figura, determine el momento de la fuerza \mathbf{P} respecto al borde OA .

3.58 Un tetraedro rectangular tiene seis lados de longitud a . a) Demuestre que dos bordes opuestos, como OA y BC , son mutuamente perpendiculares. b) Use esta propiedad y el resultado obtenido en el problema 3.57 para determinar la distancia perpendicular entre los bordes OA y BC .

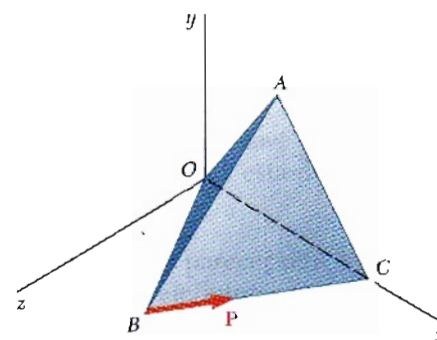


Figura P3.57 y P3.58

3.59 Un mástil se monta sobre el techo de una casa usando la ménsula $ABCD$ y lo sostienen los cables EF , EG y EH . Si la fuerza ejercida por el cable EF en el punto E es de 29.7 lb, determine el momento de esa fuerza respecto a la línea que une los puntos D e I .

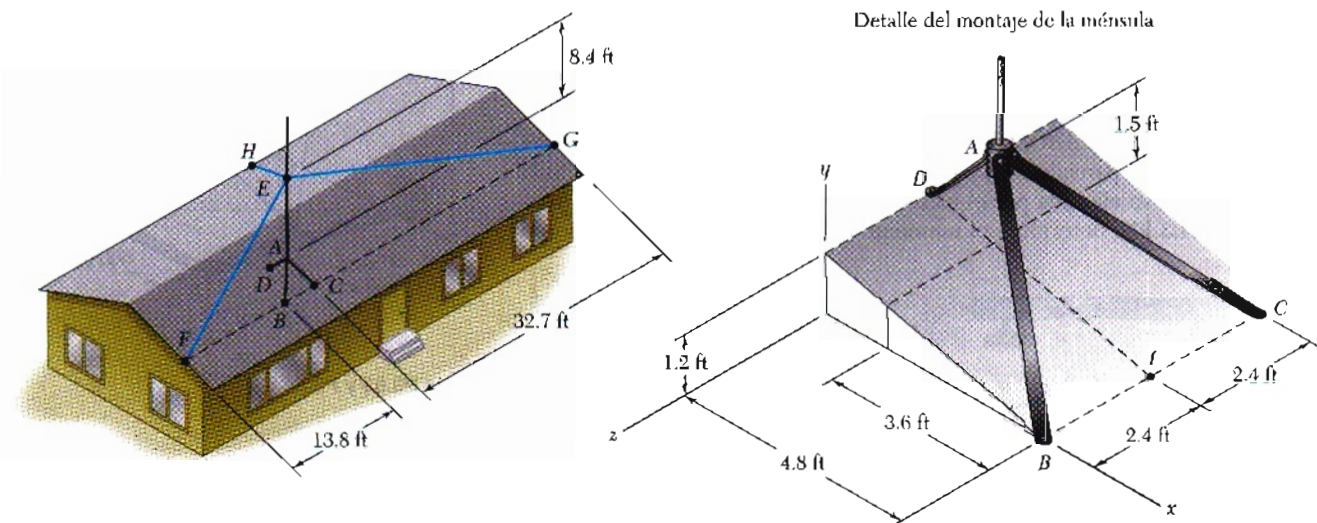


Figura P3.59 y P3.60

3.60 Un mástil se monta sobre el techo de una casa usando la ménsula $ABCD$ y lo sostienen los cables EF , EG y EH . Si la fuerza ejercida por el cable EG en E es de 24.6 lb, determine el momento de esa fuerza respecto a la línea que une los puntos D e I .

3.61 Dos fuerzas \mathbf{F}_1 y \mathbf{F}_2 en el espacio tienen la misma magnitud F . Demuestre que el momento de \mathbf{F}_1 respecto a la línea de acción de \mathbf{F}_2 es igual al momento de \mathbf{F}_2 respecto a la línea de acción de \mathbf{F}_1 .

***3.62** En el problema 3.53, determine la distancia perpendicular entre el tramo BH del cable y la diagonal AD .

***3.63** En el problema 3.54, determine la distancia perpendicular entre el tramo BG del cable y la diagonal AD .

***3.64** En el problema 3.59, determine la distancia perpendicular entre el cable EF y la línea que une los puntos D e I .

***3.65** En el problema 3.60, determine la distancia perpendicular entre el cable EG y la línea que une los puntos D e I .

***3.66** En el problema 3.55, determine la distancia perpendicular entre el elemento EF y el borde AD de la pasarela.

***3.67** En el problema 3.56, determine la distancia perpendicular entre el elemento GH y el borde AD de la pasarela.

Se dice que *dos fuerzas \mathbf{F} y $-\mathbf{F}$ que tienen la misma magnitud, líneas de acción paralelas y sentidos opuestos forman un par* (figura 3.30). Obviamente, la suma de las componentes de las dos fuerzas en cualquier dirección es igual a cero. Sin embargo, la suma de los momentos de las dos fuerzas con respecto a un punto dado no es cero. Aunque las dos fuerzas no originarán una traslación del cuerpo sobre el que están actuando, éstas sí tenderán a hacerlo rotar.

Al representar con \mathbf{r}_A y \mathbf{r}_B , respectivamente, a los vectores de posición de los puntos de aplicación de \mathbf{F} y $-\mathbf{F}$ (figura 3.31), se encuentra que la suma de los momentos de las dos fuerzas con respecto a O es

$$\mathbf{r}_A \times \mathbf{F} + \mathbf{r}_B \times (-\mathbf{F}) = (\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B) \times \mathbf{F}$$

Si se define $\mathbf{r}_A - \mathbf{r}_B = \mathbf{r}$, donde \mathbf{r} es el vector que une los puntos de aplicación de las dos fuerzas, se concluye que la suma de los momentos de \mathbf{F} y $-\mathbf{F}$, con respecto a O , está representado por el vector

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (3.47)$$

El vector \mathbf{M} se conoce como el *momento del par*; se trata de un vector perpendicular al plano que contiene las dos fuerzas y su magnitud está dada por

$$M = rF \sin \theta = Fd \quad (3.48)$$

donde d es la distancia perpendicular entre las líneas de acción de \mathbf{F} y $-\mathbf{F}$. El sentido de \mathbf{M} está definido por la regla de la mano derecha.

Como el vector \mathbf{r} en (3.47) es independiente de la elección del origen O de los ejes coordenados, se observa que se obtendría el mismo resultado si los momentos de \mathbf{F} y $-\mathbf{F}$ se hubieran calculado con respecto a un punto O' . Por tanto, el momento \mathbf{M} de un par es un *vector libre* (sección 2.3) que puede ser aplicado en cualquier punto (figura 3.32).

A partir de la definición del momento de un par también se concluye que dos pares, uno constituido por las fuerzas \mathbf{F}_1 y $-\mathbf{F}_1$, y el otro constituido por las fuerzas \mathbf{F}_2 y $-\mathbf{F}_2$ (figura 3.33) tendrán momentos iguales si

$$F_1 d_1 = F_2 d_2 \quad (3.49)$$

y si los dos pares se encuentran en planos paralelos (o en el mismo plano) y tienen el mismo sentido.

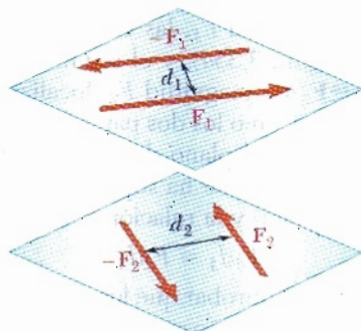


Figura 3.33



Figura 3.30

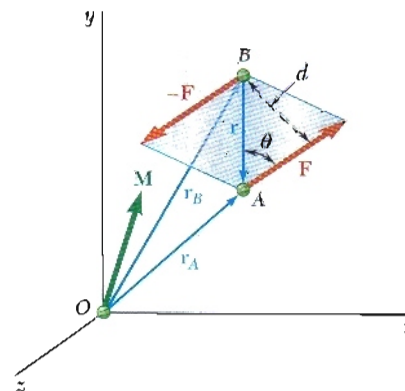


Figura 3.31

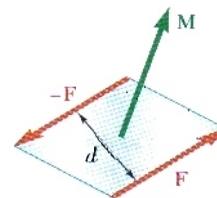


Figura 3.32



Fotografía 3.1 Las fuerzas paralelas de igual magnitud ejercidas hacia arriba y hacia abajo sobre los brazos de la cruceta, son ejemplo de un par.

3.13. PARES EQUIVALENTES

La figura 3.34 muestra tres pares que actúan de manera sucesiva sobre la misma caja rectangular. Como se vio en la sección anterior, el único movimiento que un par le puede impartir a un cuerpo rígido es una rotación. Como cada uno de los tres pares mostrados tiene el mismo momento M (la misma dirección y la misma magnitud $M = 120 \text{ lb} \cdot \text{in.}$), se puede esperar que los tres pares tengan el mismo efecto sobre la caja.

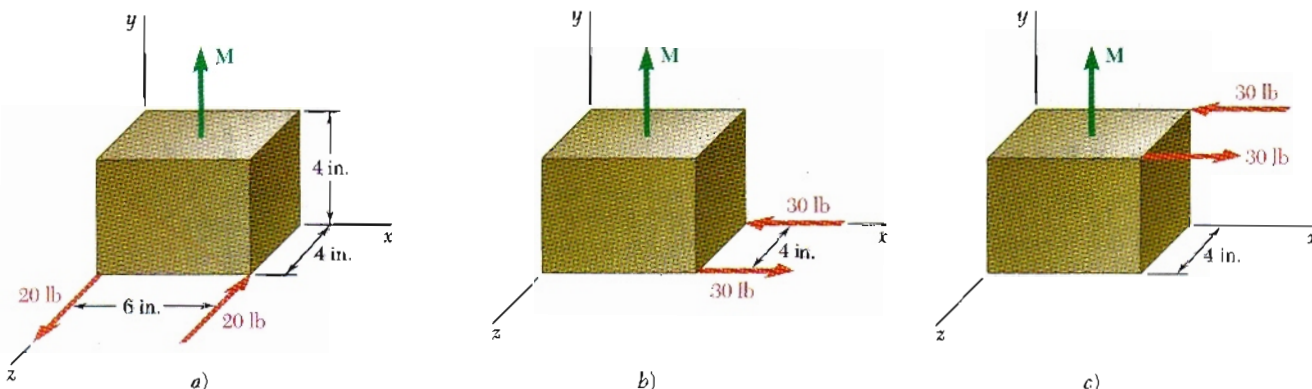


Figura 3.34

Por más razonable que parezca esta conclusión, no debe aceptarse de inmediato. Aunque la intuición es de gran ayuda en el estudio de la mecánica, no debe ser aceptada como un sustituto del razonamiento lógico. Antes de establecer que dos sistemas (o grupos) de fuerzas tienen el mismo efecto sobre un cuerpo rígido, esto debe demostrarse con base en la evidencia experimental que se ha presentado hasta este momento. Esta evidencia consiste en la ley del paralelogramo para la suma de dos fuerzas (sección 2.2) y en el principio de transmisibilidad (sección 3.3). Por tanto, se establecerá que *dos sistemas de fuerzas equivalentes* (esto es, que dichos sistemas tienen el mismo efecto sobre un cuerpo rígido) *sí pueden transformarse a uno de ellos en el otro por medio de una o varias de las siguientes operaciones*: 1) reemplazar dos fuerzas que actúan sobre la misma partícula por su resultante, 2) descomponer a una fuerza en dos componentes, 3) cancelar dos fuerzas iguales y opuestas que actúan sobre la misma partícula, 4) unir a la misma partícula dos fuerzas iguales y opuestas y 5) mover una fuerza a lo largo de su línea de acción. Cada una de estas operaciones se justifica fácilmente con base en la ley del paralelogramo o en el principio de transmisibilidad.

Ahora se procede a demostrar que *dos pares que tienen el mismo momento M son equivalentes*. Primero se consideran dos pares contenidos en el mismo plano y se supone que dicho plano coincide con el plano de la figura (figura 3.35). El primer par está constituido por las fuerzas F_1 y $-F_1$ de magnitud F_1 , las cuales están localizadas a una distancia d_1 entre sí (figura 3.35a), y el segundo par está constituido por las fuerzas F_2 y $-F_2$ de magnitud F_2 , localizadas a una distancia d_2 entre sí (figura 3.35d). Como los dos pares tienen el mismo momento M , que es perpendicular al plano de la figura, ambos pares deben tener el mismo sentido (el cual se ha supuesto contrario al movimiento de las manecillas del reloj) y la relación

$$F_1 d_1 = F_2 d_2 \quad (3.49)$$

debe ser satisfecha. Para comprobar que los dos pares son equivalentes, se debe demostrar que el primer par puede ser transformado en el segundo por medio de las operaciones enumeradas con anterioridad.

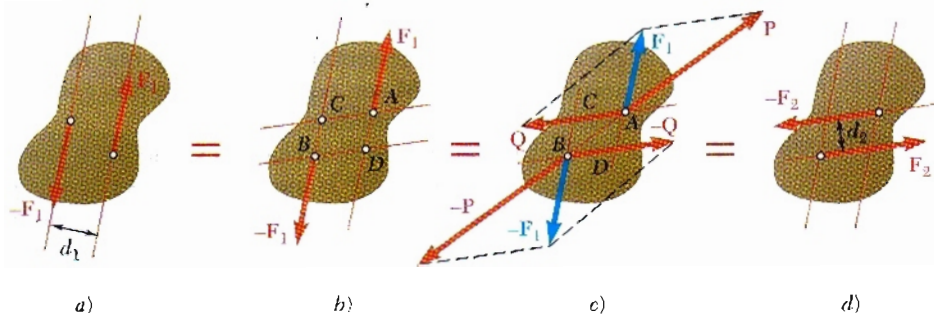


Figura 3.35

Al representar con A, B, C y D los puntos de intersección de las líneas de acción de los dos pares, se deslizan primero las fuerzas F_1 y $-F_1$ hasta que estén unidas, respectivamente, a A y B , como se muestra en la figura 3.35b. Entonces, la fuerza F_1 se descompone en una componente P a lo largo de la línea AB y una componente Q a lo largo de AC (figura 3.35c); similarmente, la fuerza $-F_1$ se descompone en $-P$ a lo largo de AB y en $-Q$ a lo largo de BD . Las fuerzas P y $-P$ tienen la misma magnitud, la misma línea de acción y sentidos opuestos; tales fuerzas pueden moverse a lo largo de su línea de acción común hasta aparecer aplicadas en el mismo punto para que, entonces, puedan ser canceladas. Por tanto, el par formado por F_1 y $-F_1$ se reduce al par constituido por Q y $-Q$.

A continuación se comprueba que las fuerzas Q y $-Q$ son iguales, respectivamente, a las fuerzas $-F_2$ y F_2 . El momento del par formado por Q y $-Q$ puede obtenerse calculando el momento de Q con respecto a B ; en forma similar, el momento del par formado por F_1 y $-F_1$ es el momento de F_1 con respecto a B . Pero, por el teorema de Varignon, el momento de F_1 es igual a la suma de los momentos de sus componentes P y Q . Como el momento de P con respecto a B es igual a cero, el momento del par formado por Q y $-Q$ debe ser igual al momento del par formado por F_1 y $-F_1$. Recordando (3.49), se escribe

$$Qd_2 = F_1d_1 = F_2d_2 \quad \text{y} \quad Q = F_2$$

Por tanto, las fuerzas Q y $-Q$ son iguales, respectivamente, a las fuerzas $-F_2$ y F_2 , y el par de la figura 3.35a es equivalente al par de la figura 3.35d.

Considere ahora dos pares contenidos en planos paralelos P_1 y P_2 ; a continuación se demostrará que dichos pares son equivalentes si tienen el mismo momento. En virtud de lo que se ha presentado hasta ahora, se puede suponer que ambos pares están constituidos por fuerzas que tienen la misma magnitud F y que actúan a lo largo de líneas paralelas (figura 3.36a y d). Se pretende demostrar que el par contenido en el plano P_1 puede ser transformado en el par contenido en el plano P_2 por medio de las operaciones estándar que ya se mencionaron.

Considere dos planos definidos, respectivamente, por las líneas de acción de F_1 y $-F_2$ y por las líneas de acción de $-F_1$ y F_2 (figura 3.36b). En un punto sobre la línea de intersección de los dos planos se unen dos fuerzas F_3 y $-F_3$, que son iguales, respectivamente, a F_1 y $-F_1$. El par formado por F_1 y $-F_3$ puede ser reemplazado por un par constituido por F_3 y $-F_2$ (figura 3.36c) puesto que, obviamente, ambos pares tienen el mismo momento y están contenidos en el mismo plano. En forma análoga, el par formado por $-F_1$ y F_3 puede ser reemplazado por un par constituido por $-F_3$ y F_2 . Cancelando las dos fuerzas igual-

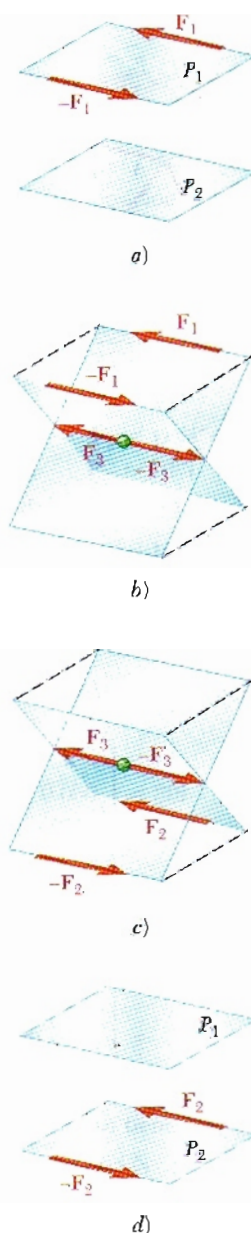


Figura 3.36

les y opuestas \mathbf{F}_3 y $-\mathbf{F}_3$, se obtiene el par deseado en el plano P_2 (figura 3.36d). En este sentido, se concluye que dos pares que tienen el mismo momento \mathbf{M} son equivalentes si están contenidos en el mismo plano o en planos paralelos.

La propiedad que se acaba de establecer es muy importante para entender correctamente la mecánica de los cuerpos rígidos. Esta propiedad indica que cuando un par actúa sobre un cuerpo rígido, es irrelevante dónde actúan las dos fuerzas que forman al par o cuáles son la magnitud y la dirección que esas fuerzas tienen. Lo único que importa es el momento del par (su magnitud y dirección). Los pares con el mismo momento tendrán el mismo efecto sobre el cuerpo rígido.

3.14. ADICIÓN O SUMA DE PARES

Considere dos planos P_1 y P_2 que se intersectan y dos pares que actúan, respectivamente, en P_1 y P_2 . Se puede suponer, sin perder la generalidad, que el par en P_1 consta de dos fuerzas \mathbf{F}_1 y $-\mathbf{F}_1$ perpendiculares a la línea de intersección de los dos planos y que actúan, respectivamente, en A y B (figura 3.37a). En forma similar, se supone que el par en P_2 consta de dos fuerzas \mathbf{F}_2 y $-\mathbf{F}_2$ perpendiculares a AB y que actúan, respectivamente, en A y B . Es obvio que la resultante \mathbf{R} de \mathbf{F}_1 y \mathbf{F}_2 y la resultante $-\mathbf{R}$ de $-\mathbf{F}_1$ y $-\mathbf{F}_2$ forman un par. Si se representa con \mathbf{r} el vector que une a B con A y si recordamos la definición de par (sección 3.12), el momento \mathbf{M} del par resultante queda expresado como sigue:

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{R} = \mathbf{r} \times (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2)$$

y, por el teorema de Varignon,

$$\mathbf{M} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r} \times \mathbf{F}_2$$

Pero el primer término en la expresión obtenida representa al momento \mathbf{M}_1 del par en P_1 y el segundo término representa al momento \mathbf{M}_2 del par en P_2 . Así se tiene

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_2 \quad (3.50)$$

y se concluye que la suma de dos pares cuyos momentos son iguales a \mathbf{M}_1 y \mathbf{M}_2 es un par de momento \mathbf{M} igual a la suma vectorial de \mathbf{M}_1 y \mathbf{M}_2 (figura 3.37b).

3.15. LOS PARES PUEDEN REPRESENTARSE POR MEDIO DE VECTORES

Como se vio en la sección 3.13, los pares que tienen el mismo momento, sin importar si actúan en el mismo plano o en planos paralelos, son equivalentes. Por tanto, no hay necesidad de dibujar las fuerzas que en realidad forman un par dado con el propósito de definir el efecto que dicho par tiene sobre un cuerpo rígido (figura 3.38a). Es suficiente dibujar una flecha igual en magnitud y dirección al momento \mathbf{M} del par (figura 3.38b). Por otra parte, en la sección 3.14 quedó expresado que la suma de dos pares es otro par y que el momento \mathbf{M} del par resultante puede obtenerse mediante la suma vectorial los momentos \mathbf{M}_1 y \mathbf{M}_2 , de los pares dados. Por consiguiente, los pares obedecen la ley para la adición de vectores y la flecha usada en la figura 3.38b para representar al par definido en la figura 3.38a puede considerarse como un vector verdadero.

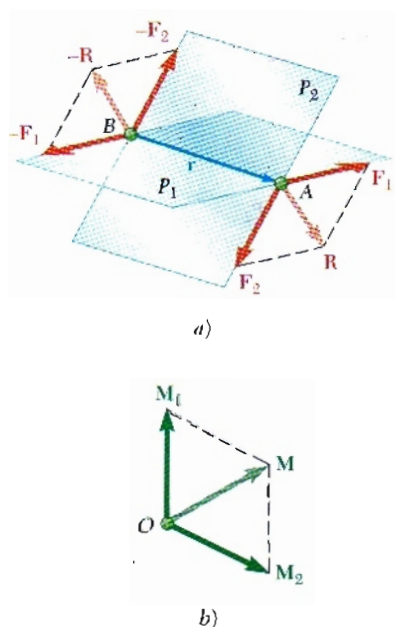


Figura 3.37

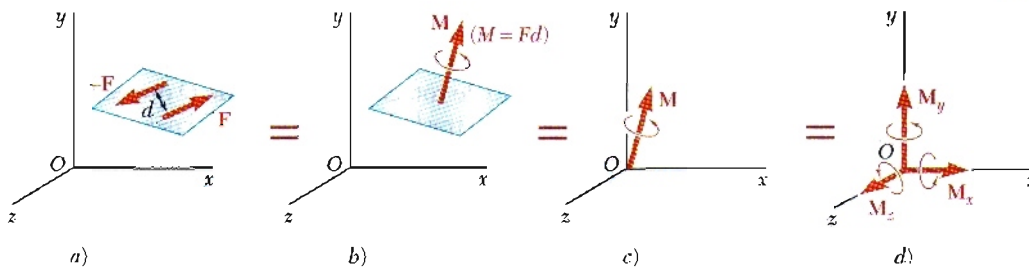


Figura 3.38

El vector que representa un par recibe el nombre de *vector de par*. Obsérvese que en la figura 3.38 se usó una flecha roja para distinguir al vector de par, la cual representa al par mismo, del momento del par, que se representó con una flecha verde en figuras anteriores. Nótese también que se ha agregado el símbolo \curvearrowright a esta flecha roja con el fin de evitar cualquier confusión con los vectores que representan fuerzas. El vector de par, como el momento de un par, es un vector libre. Por tanto, su punto de aplicación puede ser elegido en el origen del sistema de coordenadas si así se desea (figura 3.38c). Además, el vector del momento \mathbf{M} se puede descomponer en componentes vectoriales M_x , M_y y M_z , las cuales están dirigidas a lo largo de los ejes coordenados (figura 3.38d). Esas componentes vectoriales representan pares que actúan, respectivamente, en los planos yz , xz y xy .

3.16. DESCOMPOSICIÓN DE UNA FUERZA DADA EN UNA FUERZA EN O Y UN PAR

Considere una fuerza \mathbf{F} que actúa sobre un cuerpo rígido en un punto A definido por el vector de posición \mathbf{r} (figura 3.39a). Suponga que por alguna razón se quiere que la fuerza actúe en el punto O. Aunque \mathbf{F} se puede mover a lo largo de su línea de acción (principio de transmisibilidad), no es posible moverla al punto O, que no se encuentra sobre la línea de acción original de la fuerza, sin modificar el efecto que \mathbf{F} tiene sobre el cuerpo rígido.

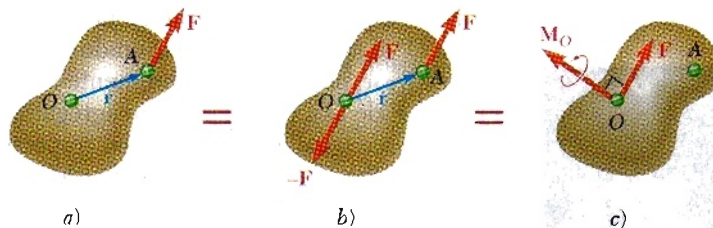


Figura 3.39

Sin embargo, pueden unirse dos fuerzas al punto O, una igual a \mathbf{F} y otra igual a $-\mathbf{F}$, sin modificar el efecto que la fuerza original tiene sobre el cuerpo rígido (figura 3.39b). Como una consecuencia de esta transformación, ahora una fuerza \mathbf{F} se aplica en O; las otras dos fuerzas

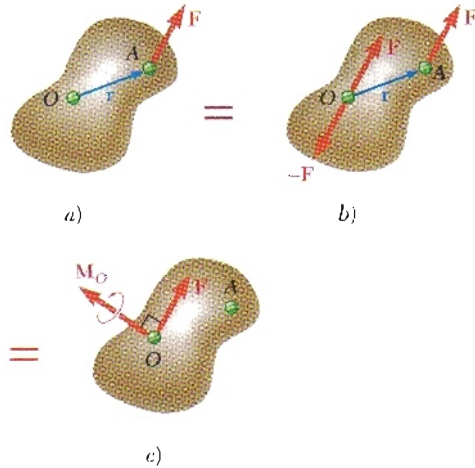


Figura 3.39 (repetida)

forman un par con un momento $\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$. Por tanto, *cualquier fuerza \mathbf{F} que actúe sobre un cuerpo rígido puede ser trasladada a un punto arbitrario O siempre y cuando se agregue un par cuyo momento sea igual al momento de \mathbf{F} con respecto a O* . El par tiende a impartirle al cuerpo rígido el mismo movimiento de rotación alrededor de O que la fuerza \mathbf{F} ocasionaba antes de que fuera trasladada al punto O . El par se representa por el vector de par \mathbf{M}_O que es perpendicular al plano que contiene a \mathbf{r} y a \mathbf{F} . Como \mathbf{M}_O es un vector libre, puede ser aplicado en cualquier lugar; sin embargo, por conveniencia, usualmente el vector de par se fija en O , junto con \mathbf{F} , y se hace referencia a la combinación obtenida como un *sistema fuerza-par* (figura 3.39c).

Si la fuerza \mathbf{F} se hubiera trasladado del punto A a un punto diferente O' (figura 3.40a y c), se tendría que calcular el momento $\mathbf{M}_{O'} = \mathbf{r}' \times \mathbf{F}$ de \mathbf{F} con respecto a O' y se hubiera fijado a O' un nuevo sistema fuerza-par constituido por \mathbf{F} y por el vector de par $\mathbf{M}_{O'}$. La relación que existe entre los momentos de \mathbf{F} con respecto a O y a O' se obtiene

$$\mathbf{M}_{O'} = \mathbf{r}' \times \mathbf{F} = (\mathbf{r} + \mathbf{s}) \times \mathbf{F} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} + \mathbf{s} \times \mathbf{F}$$

$$\mathbf{M}_{O'} = \mathbf{M}_O + \mathbf{s} \times \mathbf{F} \quad (3.51)$$

donde \mathbf{s} es el vector que une a O' con O . De esta manera, el momento $\mathbf{M}_{O'}$ de \mathbf{F} con respecto a O' se obtiene sumándole al momento \mathbf{M}_O de \mathbf{F} con respecto a O el producto vectorial $\mathbf{s} \times \mathbf{F}$ que representa el momento con respecto a O' de la fuerza \mathbf{F} aplicada en O .

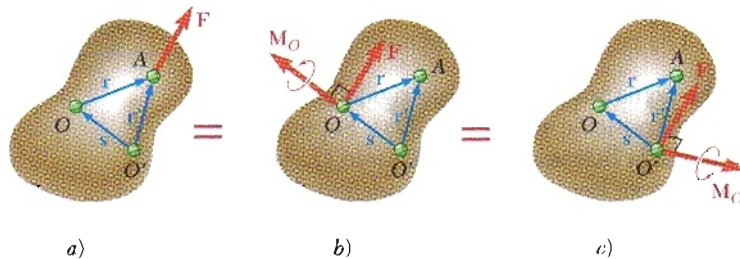


Figura 3.40



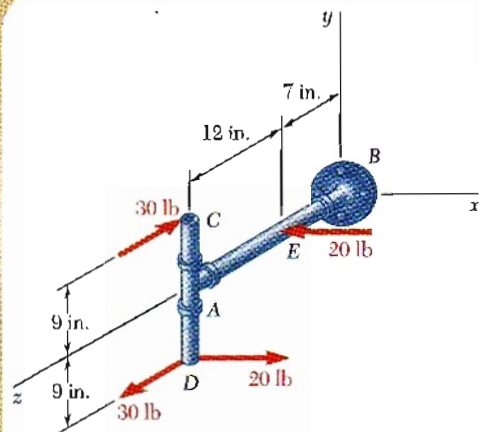
Fotografía 3.2 La fuerza ejercida por cada mano sobre la llave puede reemplazarse por un sistema equivalente fuerza-par que actúa sobre la tuerca.

Este resultado también pudo obtenerse observando que, para trasladar a O' al sistema fuerza-par unido a O (figura 3.40b y c), el vector de par \mathbf{M}_O se puede mover libremente a O' ; sin embargo, para mover la fuerza \mathbf{F} de O a O' es necesario agregarle a \mathbf{F} un vector de par cuyo momento sea igual al momento con respecto a O' de la fuerza \mathbf{F} aplicada en O . Por tanto, el vector de par $\mathbf{M}_{O'}$ debe ser igual a la suma de \mathbf{M}_O y el vector $\mathbf{s} \times \mathbf{F}$.

Como ya se ha mencionado, el sistema fuerza-par obtenido a partir de trasladar una fuerza \mathbf{F} de un punto A a un punto O consta de un vector de fuerza \mathbf{F} y de un vector de par \mathbf{M}_O perpendicular a \mathbf{F} . Por el contrario, cualquier sistema fuerza-par que conste de una fuerza \mathbf{F} y de un vector de par \mathbf{M}_O que sean *mutuamente perpendiculares*, puede ser reemplazado por una sola fuerza equivalente. Esto se lleva a cabo moviendo la fuerza \mathbf{F} en el plano perpendicular a \mathbf{M}_O hasta que su momento con respecto a O sea igual al momento del par que se desea eliminar.

PROBLEMA RESUELTO 3.6

Determine las componentes del par simple que es equivalente a los dos pares mostrados.



SOLUCIÓN

Los cálculos se simplificarán si se fijan en A dos fuerzas de 20 lb iguales y opuestas. Esto permitirá reemplazar al par original de las fuerzas de 20 lb por dos nuevos pares originados por fuerzas de 20 lb, uno de los cuales se encuentra en el plano zx ; el otro se encuentra en un plano paralelo al plano xy . Los tres pares mostrados en el croquis adjunto pueden ser representados por tres vectores de par M_x , M_y y M_z dirigidos a lo largo de los ejes coordenados. Los momentos correspondientes son

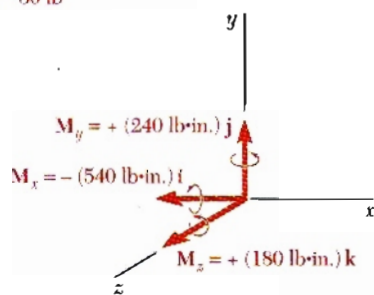
$$M_x = -(30 \text{ lb})(18 \text{ in.}) = -540 \text{ lb} \cdot \text{in.}$$

$$M_y = +(20 \text{ lb})(12 \text{ in.}) = +240 \text{ lb} \cdot \text{in.}$$

$$M_z = +(20 \text{ lb})(9 \text{ in.}) = +180 \text{ lb} \cdot \text{in.}$$

Estos tres momentos representan las componentes del par simple \mathbf{M} , equivalente a los pares dados. Así, se escribe

$$\mathbf{M} = -(540 \text{ lb} \cdot \text{in.})\mathbf{i} + (240 \text{ lb} \cdot \text{in.})\mathbf{j} + (180 \text{ lb} \cdot \text{in.})\mathbf{k} \quad \blacktriangleleft$$

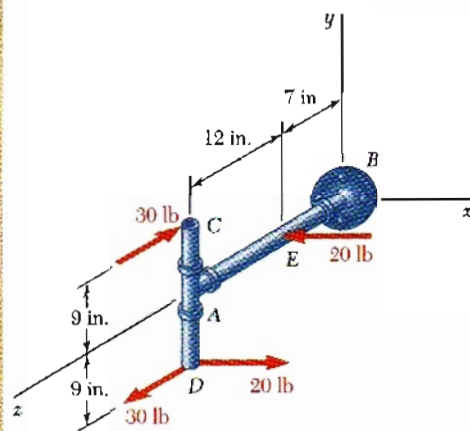


Solución alternativa. Las componentes del par equivalente simple \mathbf{M} también pueden ser determinadas calculando la suma de los momentos de las cuatro fuerzas dadas con respecto a un punto arbitrario. Si se elige al punto D, se escribe

$$\mathbf{M} = \mathbf{M}_D = (18 \text{ in.})\mathbf{j} \times (-30 \text{ lb})\mathbf{k} + [(9 \text{ in.})\mathbf{j} - (12 \text{ in.})\mathbf{k}] \times (-20 \text{ lb})\mathbf{i}$$

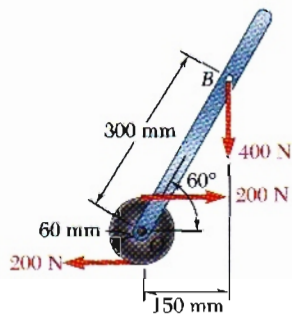
y después de calcular los diversos productos cruz se tiene

$$\mathbf{M} = -(540 \text{ lb} \cdot \text{in.})\mathbf{i} + (240 \text{ lb} \cdot \text{in.})\mathbf{j} + (180 \text{ lb} \cdot \text{in.})\mathbf{k} \quad \blacktriangleleft$$



PROBLEMA RESUELTO 3.7

Reemplace el par y la fuerza mostrados en la figura por una sola fuerza equivalente aplicada a la palanca. Determine la distancia desde el eje hasta el punto de aplicación de esta fuerza equivalente.



SOLUCIÓN

Primero se reemplazan la fuerza y el par dados por un sistema equivalente fuerza-par en O. La fuerza $\mathbf{F} = -(400 \text{ N})\mathbf{j}$ se mueve a O y al mismo tiempo se agrega un momento \mathbf{M}_O igual al momento con respecto a O, de la fuerza en su posición original.

$$\mathbf{M}_O = \overrightarrow{OB} \times \mathbf{F} = [(0.150 \text{ m})\mathbf{i} + (0.260 \text{ m})\mathbf{j}] \times (-400 \text{ N})\mathbf{j} \\ = -(60 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k}$$

Este par se suma al par formado por las dos fuerzas de 200 N, cuyo momento es igual a $-(24 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k}$ y se obtiene un par cuyo momento es igual a $-(84 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k}$. Este último par puede ser eliminado aplicando la fuerza \mathbf{F} en un punto C seleccionado de manera que

$$-(84 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k} = \overrightarrow{OC} \times \mathbf{F} \\ = [(OC) \cos 60^\circ \mathbf{i} + (OC) \sin 60^\circ \mathbf{j}] \times (-400 \text{ N})\mathbf{j} \\ = -(OC) \cos 60^\circ (400 \text{ N})\mathbf{k}$$

Entonces, se concluye

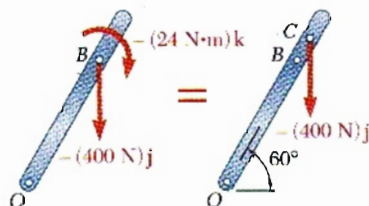
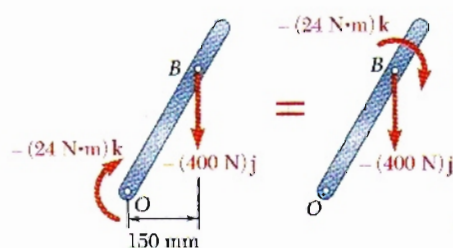
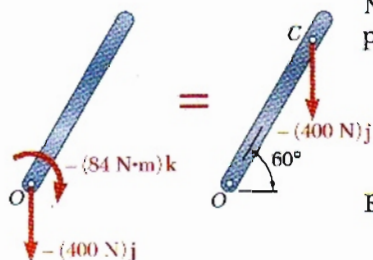
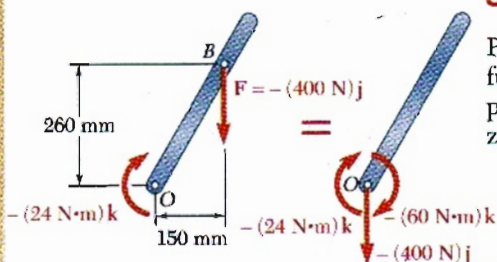
$$(OC) \cos 60^\circ = 0.210 \text{ m} = 210 \text{ mm} \quad OC = 420 \text{ mm} \quad \blacktriangleleft$$

Solución alternativa. Como el efecto de un par no depende de su ubicación, el par cuyo momento es igual a $-(24 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k}$ puede trasladarse a B; por tanto, se obtiene un sistema fuerza-par en B. Ahora el par puede ser eliminado aplicando la fuerza \mathbf{F} en un punto C elegido de manera que

$$-(24 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k} = \overrightarrow{BC} \times \mathbf{F} \\ = -(BC) \cos 60^\circ (400 \text{ N})\mathbf{k}$$

Así, se concluye que

$$(BC) \cos 60^\circ = 0.060 \text{ m} = 60 \text{ mm} \quad BC = 120 \text{ mm} \\ OC = OB + BC = 300 \text{ mm} + 120 \text{ mm} \quad OC = 420 \text{ mm} \quad \blacktriangleleft$$



RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

En esta lección se estudiaron las propiedades de los *pares*. Para resolver los problemas que se presentan a continuación es necesario recordar que el efecto neto de un par consiste en producir un momento \mathbf{M} . Como dicho momento es independiente del punto con respecto al cual se calcula, \mathbf{M} es un *vector libre* y, por tanto, permanece inalterado a medida que se mueve de un punto a otro. Además, dos pares son *equivalentes* (esto es, ambos tienen el mismo efecto sobre un cuerpo rígido dado) si producen el mismo momento.

Al determinar el momento de un par, pueden aplicarse todas las técnicas vistas anteriormente para calcular momentos. Además, como el momento de un par es un vector libre, debe ser determinado empleando el punto que resulte más conveniente.

En virtud de que el único efecto de un par es producir un momento, es posible representar un par por medio de un vector, el *vector de par*, que es igual al momento del par. El vector de par es un vector libre y será representado por un símbolo especial, ∇ para distinguirlo de los vectores de fuerza.

Al resolver los problemas propuestos de esta lección se tendrán que llevar a cabo las siguientes operaciones:

1. Sumar dos o más pares. Esto resulta en un nuevo par cuyo momento se obtiene con la suma vectorial de los momentos de los pares dados [problema resuelto 3.6].

2. Reemplazar a una fuerza por un sistema equivalente fuerza-par en un punto especificado. Como se explicó en la sección 3.16, la fuerza del sistema fuerza-par es igual a la fuerza original, mientras que el vector de par requerido es igual al momento de la fuerza original con respecto al punto dado. Además, es importante señalar que la fuerza y el vector de par son perpendiculares entre sí. Por el contrario, se concluye que un sistema fuerza-par se puede reducir a una sola fuerza sólo si la fuerza y el vector de par son mutuamente perpendiculares (véase el siguiente párrafo).

3. Reemplazar un sistema fuerza-par (con \mathbf{F} perpendicular a \mathbf{M}) con una sola fuerza equivalente. Obsérvese que el requisito de que \mathbf{F} y \mathbf{M} sean mutuamente perpendiculares se cumplirá en todos los problemas bidimensionales. La fuerza equivalente única es igual a \mathbf{F} y se aplica en forma tal que su momento con respecto al punto original de aplicación sea igual a \mathbf{M} [problema resuelto 3.7].

Problemas

3.68 Una placa de acero está sometida a la acción de dos pares, según muestra la figura. Determine *a*) el momento del par formado por las dos fuerzas de 40 N, *b*) el valor de α si $d = 820$ mm, y la resultante de los dos pares es de $8 \text{ N} \cdot \text{m}$ en sentido contrario al de las manecillas del reloj, *c*) la distancia perpendicular entre las dos fuerzas de 24 N si la resultante de los dos pares es cero.

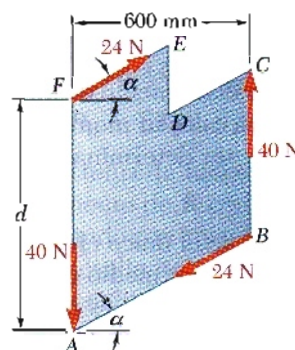


Figura P3.68

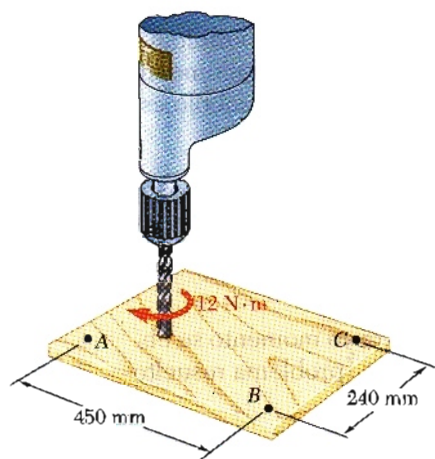


Figura P3.69

3.69 Una pieza de madera laminada en la que se están taladrando sucesivamente varios orificios se asegura a un banco de trabajo por medio de dos clavos. Si el taladro ejerce un par de $12 \text{ N} \cdot \text{m}$ sobre la pieza de madera, determine la magnitud de las fuerzas resultantes aplicadas a los clavos si éstos se encuentran *a*) en A y B, *b*) en B y C, *c*) en A y C.

3.70 La placa de acero mostrada en la figura sostiene seis rodillos tensores de 2 in. de diámetro montados sobre la placa. Dos bandas planas pasan alrededor de los rodillos, de los cuales A y D se ajustan para que la tensión en cada banda sea de 10 lb. Determine *a*) el par resultante que actúa sobre la placa si $a = 8$ in., *b*) el valor de a para el cual el par resultante que actúa sobre la placa es de $480 \text{ lb} \cdot \text{in.}$ en el mismo sentido que las manecillas del reloj.

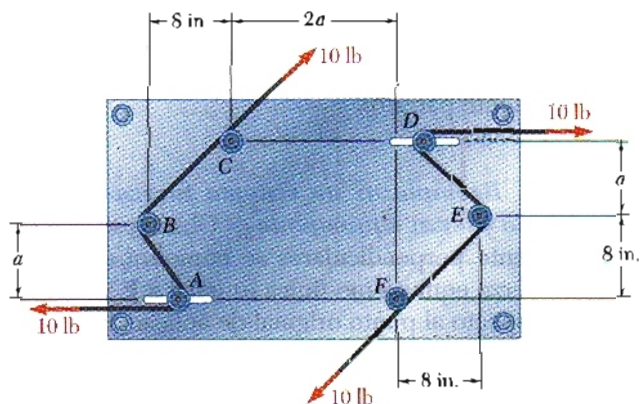


Figura P3.70

3.71 Dos clavijas de 2.4 in. de diámetro están montadas en A y C sobre una placa de acero, y dos barras están conectadas a la placa en B y D. Se pasa una cuerda alrededor de las clavijas y se jala como indica la figura, mientras que las barras ejercen fuerzas de 2.5 lb sobre la placa tal como se muestra. *a)* Determine el par resultante que actúa sobre la placa si $T = 9$ lb. *b)* Si únicamente se usa la cuerda, ¿en qué dirección debería jalarsc para generar el mismo par con la mínima tensión? *c)* Determine el valor de esa tensión mínima.

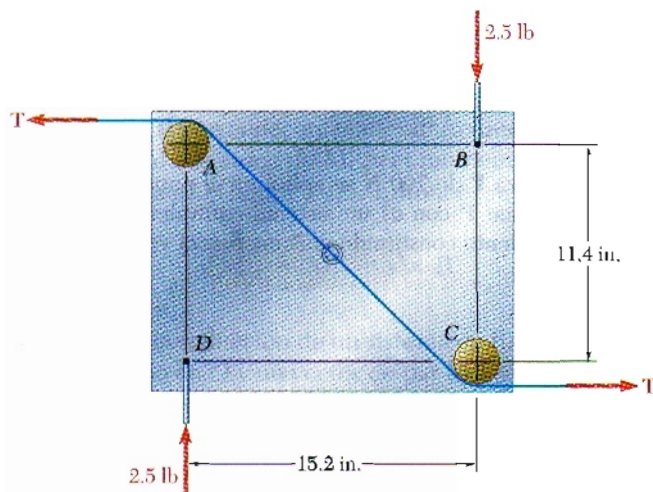


Figura P3.71

3.72 Los dos ejes de un reductor de velocidad están sometidos a la acción de los pares $M_1 = 18 \text{ N} \cdot \text{m}$ y $M_2 = 7.5 \text{ N} \cdot \text{m}$, respectivamente. Reemplace ambos pares por un solo par equivalente y especifique su magnitud y la dirección de su eje.

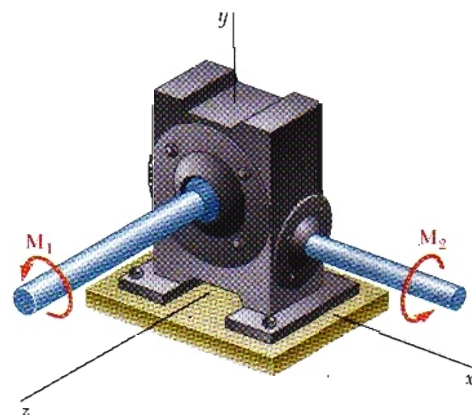


Figura P3.72

3.73 y 3.74 Si $P = 0$, reemplace los dos pares restantes por un solo par equivalente; especifique su magnitud y la dirección de su eje.

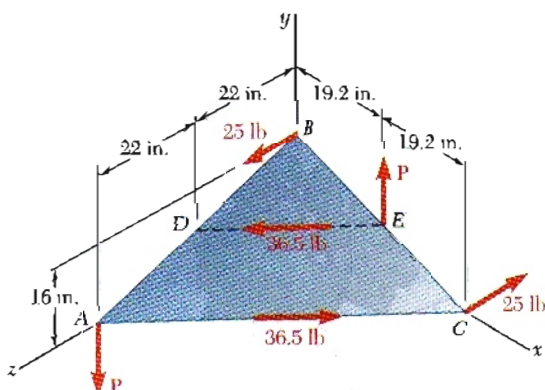


Figura P3.73 y P3.76

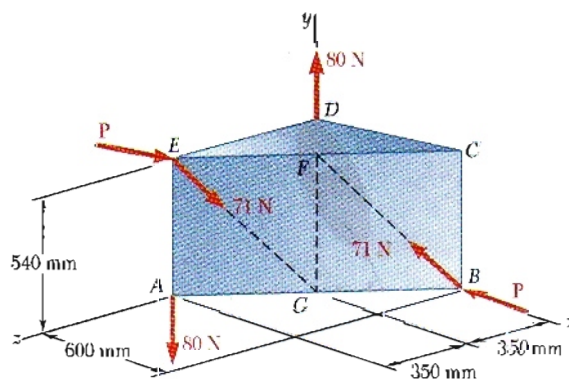


Figura P3.74 y P3.75

3.75 Si $P = 90 \text{ N}$, reemplace los tres pares por un solo par equivalente; especifique su magnitud y la dirección de su eje.

3.76 Si $P = 52.5 \text{ lb}$, reemplace los tres pares por un solo par equivalente; especifique su magnitud y la dirección de su eje.

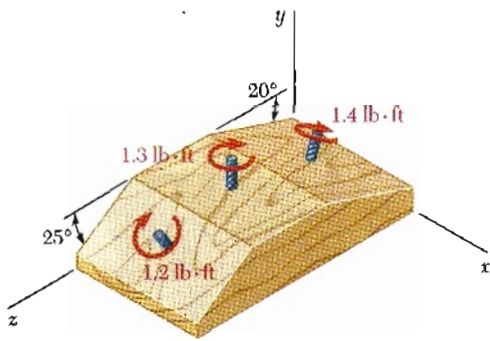


Figura P3.77

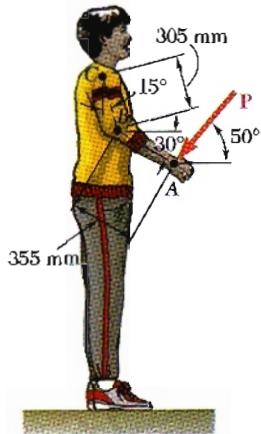


Figura P3.78

3.77 Durante un proceso de manufactura, se taladran simultáneamente tres agujeros en una pieza de trabajo. Si los agujeros son perpendiculares a la superficie de la pieza de trabajo, reemplace los pares aplicados a las brocas por un solo par equivalente; especifique su magnitud y la dirección de su eje.

3.78 Una fuerza P con magnitud de 160 N se aplica a la mano de un hombre como se muestra en la figura. Sustituya P con un sistema equivalente fuerza-par en *a*) el codo B , *b*) el hombro C .

3.79 Una fuerza vertical P de 135 N se aplica en A a la ménsula que se muestra en la figura, la cual se sostiene por medio de los tornillos colocados en B y C . *a*) Reemplace P con un sistema fuerza-par equivalente en B . *b*) Encuentre las dos fuerzas horizontales en B y C que son equivalentes al par obtenido en el inciso *a*).

3.80 Una fuerza P de 700 N se aplica en el punto A de un elemento estructural. Reemplace P con *a*) un sistema equivalente fuerza-par en C , *b*) un sistema equivalente constituido por una fuerza vertical en B y una segunda fuerza en D .

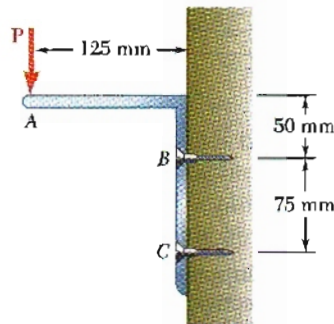


Figura P3.79

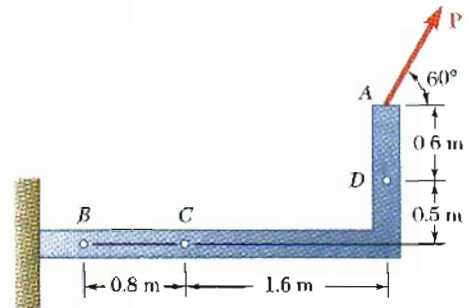


Figura P3.80

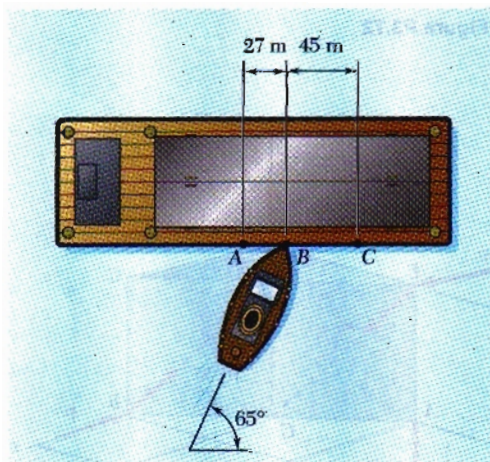


Figura P3.81

3.81 Un remolcador ejerce una fuerza de 2.8 kN a lo largo de su eje, en el punto B , sobre una barcaza. Reemplace la fuerza aplicada en B con un sistema equivalente formado por dos fuerzas paralelas aplicadas en A y C .

3.82 Un diseñador de jardines trata de colocar en posición vertical un árbol aplicando una fuerza de 54 lb, como indica la figura. Después, dos ayudantes intentan hacer lo mismo jalando, uno de ellos, en B y, el otro, empujando en C .

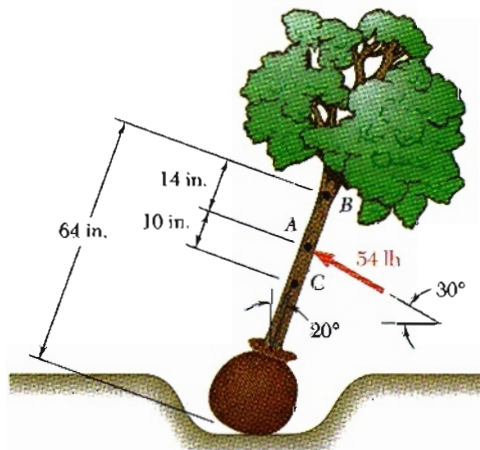


Figura P3.82

jando con una fuerza paralela en C . Determine estas dos fuerzas de tal forma que sean equivalentes a la fuerza única de 54 lb mostrada.

3.83 Un diseñador de jardines trata de colocar en posición vertical el árbol de la figura P3.82 al aplicar una fuerza de 54 lb. *a)* Reemplace esta fuerza con un sistema equivalente fuerza-par aplicado en C . *b)* Dos ayudantes intentan hacer lo mismo con el árbol, uno aplica una fuerza horizontal en C y el otro jala en B . Determine estas dos fuerzas si son equivalentes a la fuerza única del inciso *a)*.

3.84 Una fuerza y un par se aplican a una viga. *a)* Reemplace este sistema con una sola fuerza F aplicada en el punto G , y determine la distancia d . *b)* Resuelva el inciso *a)* suponiendo que se intercambian las direcciones de las dos fuerzas de 150 lb.

3.85 Tres trabajadores tratan de mover una caja de madera de $1 \times 1 \times 1.2$ m aplicando las tres fuerzas horizontales que se muestran en la figura. *a)* Si $P = 240$ N, reemplace las tres fuerzas con un sistema fuerza-par equivalente en A . *b)* Reemplace el sistema fuerza-par del inciso *a)* por una sola fuerza, y determine el lugar del lado AB sobre el que debería aplicarse. *c)* Determine la magnitud de P , de tal forma que las tres fuerzas puedan reemplazarse por una sola fuerza aplicada en B .

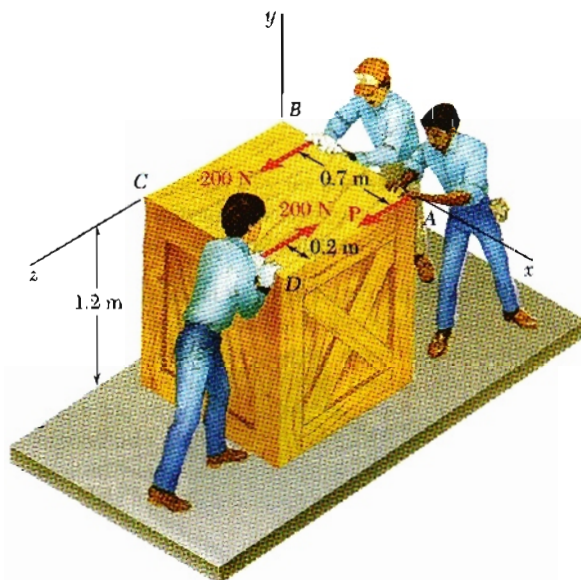


Figura P3.85

3.86 Para abrir una válvula de agua instalada en el suelo, dos trabajadores aplican las fuerzas horizontales indicadas en la figura sobre la manija de la válvula rosca. Muestre que estas fuerzas son equivalentes a una sola fuerza y especifique, si es posible, el punto de aplicación de dicha fuerza sobre la manija ABC .

3.87 Tres cables conectados a un disco ejercen sobre éste las fuerzas indicadas en la figura. *a)* Reemplace las tres fuerzas con un sistema fuerza-par equivalente en A . *b)* Determine la fuerza única que es equivalente al sistema fuerza-par obtenido en el inciso *a)*, y especifique su punto de aplicación sobre la línea que pasa por los puntos A y D .

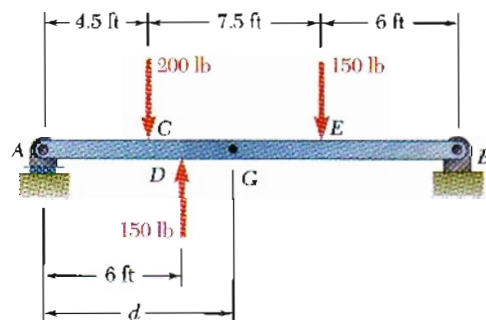


Figura P3.84

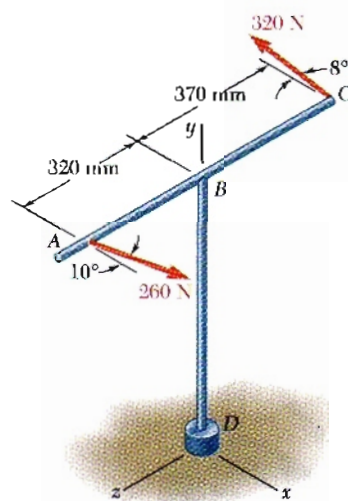


Figura P3.86

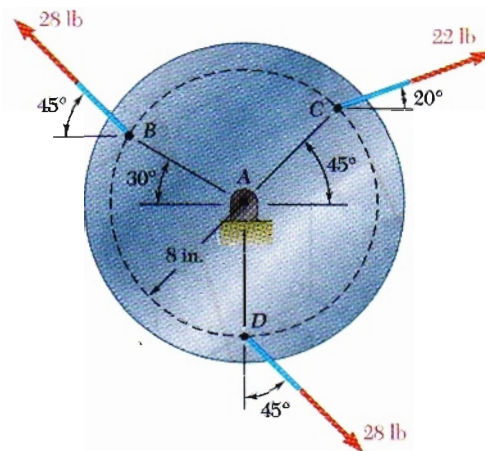


Figura P3.87

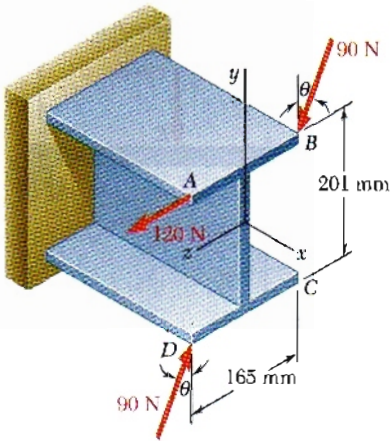


Figura P3.88

3.88 Una fuerza y un par que pertenecen al plano yz se aplican al extremo de una viga de patín ancho en voladizo. Este sistema debe reemplazarse por una sola fuerza equivalente. *a)* Para $\theta = 15^\circ$, determine la magnitud y la línea de acción de la fuerza equivalente. *b)* Determine el valor de θ si la línea de acción de la fuerza equivalente debe intersecar a la línea que pasa por los puntos B y C a 40 mm por arriba de C .

3.89 Una placa trapezoidal está sometida a la fuerza \mathbf{P} y al par que se muestran en la figura. Determine *a)* el punto de aplicación sobre la placa de la fuerza \mathbf{F} mínima equivalente al sistema dado, *b)* la magnitud y la dirección de \mathbf{F} .

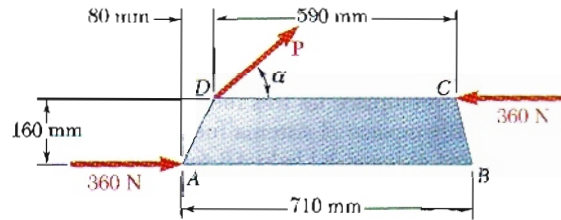


Figura P3.89

3.90 Una fuerza excéntrica y compresiva \mathbf{P} de 250 kN se aplica al extremo de una columna. Reemplace \mathbf{P} con un sistema fuerza-par equivalente en G .

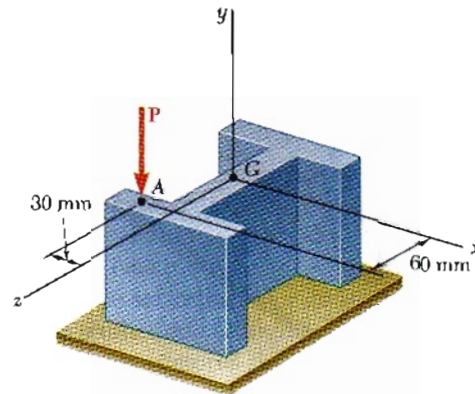


Figura P3.90

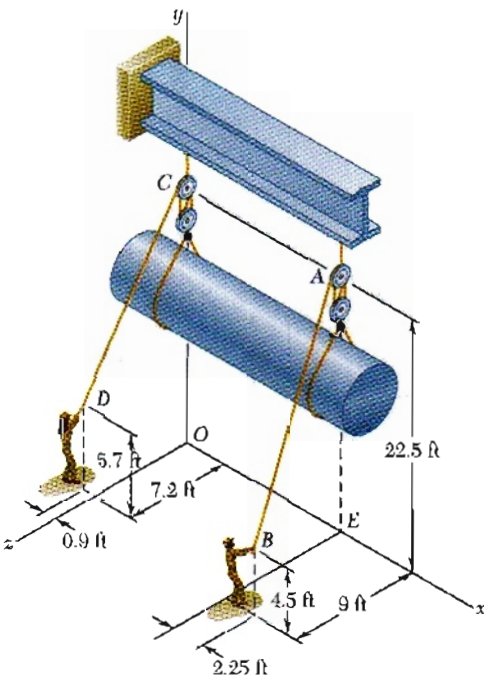


Figura P3.91 y P3.92

3.91 Dos trabajadores usan bloques y polipastos conectados a la parte inferior de una viga I para elevar un gran tanque cilíndrico. Si la tensión en la cuerda AB es de 54 lb, reemplace la fuerza ejercida en A por la cuerda AB con un sistema equivalente fuerza-par en E .

3.92 Dos trabajadores usan bloques y polipastos conectados a la parte inferior de una viga I para elevar un gran tanque cilíndrico. Si la tensión en la cuerda CD es de 61 lb, reemplace la fuerza ejercida en C por la cuerda CD con un sistema equivalente fuerza-par en O .

3.93 La grúa de brazo mostrada en la figura se orienta de manera que su aguilón AD sea paralelo al eje x y se utiliza para mover una caja pesada. Si la tensión en el cable AB es de 10.5 kN , reemplace la fuerza ejercida por el cable en A con un sistema equivalente fuerza-par en el centro O de la base de la grúa.

3.94 Un plomero aplica una fuerza de 220 N sobre el mango de una llave, mientras retira una conexión del extremo de un tubo. Si la llave y la fuerza pertenecen a un plano vertical paralelo al plano yz , reemplace la fuerza con un sistema equivalente fuerza-par en el origen del sistema coordenado.

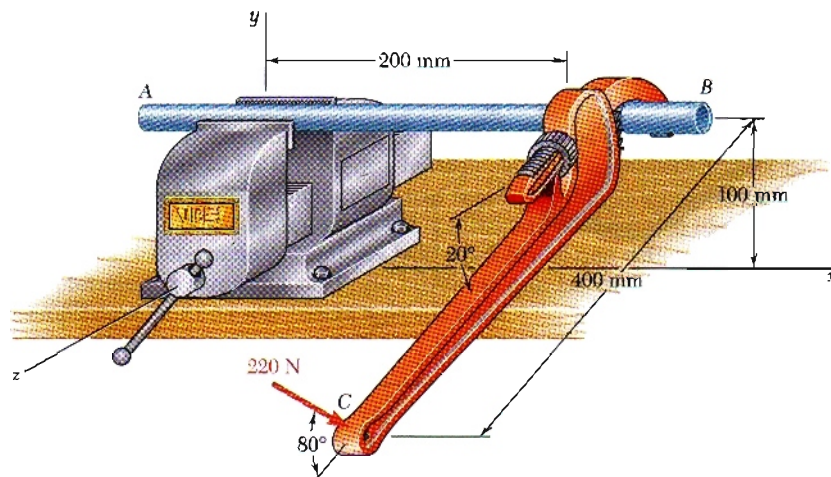


Figura P3.94

3.95 Una fuerza F de 63 lb y un par M de $560 \text{ lb} \cdot \text{in.}$ se aplican a la esquina A del bloque mostrado en la figura. Reemplace el sistema fuerza-par dado con un sistema equivalente fuerza-par en la esquina D .

3.96 El pulidor manual de una rectificadora industrial en miniatura pesa 2.4 N y su centro de gravedad está localizado sobre el eje y . La cabeza del pulidor está desviada del plano xz de manera que la línea BC forma un ángulo de 25° con la dirección x . Muestre que el peso del pulidor manual y los dos pares M_1 y M_2 se pueden reemplazar con una sola fuerza equivalente. Además, suponiendo que $M_1 = 0.068 \text{ N} \cdot \text{m}$ y $M_2 = 0.065 \text{ N} \cdot \text{m}$, determine *a*) la magnitud y la dirección de la fuerza equivalente, *b*) el punto donde su línea de acción interseca al plano xz .

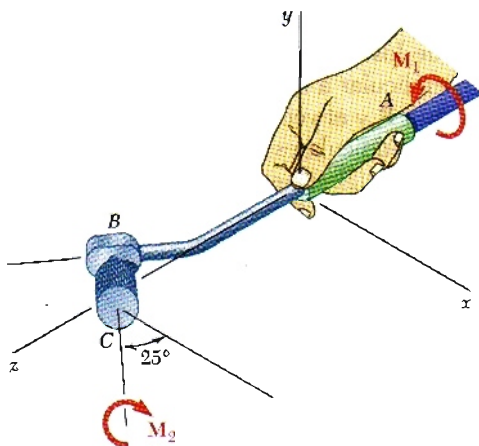


Figura P3.96

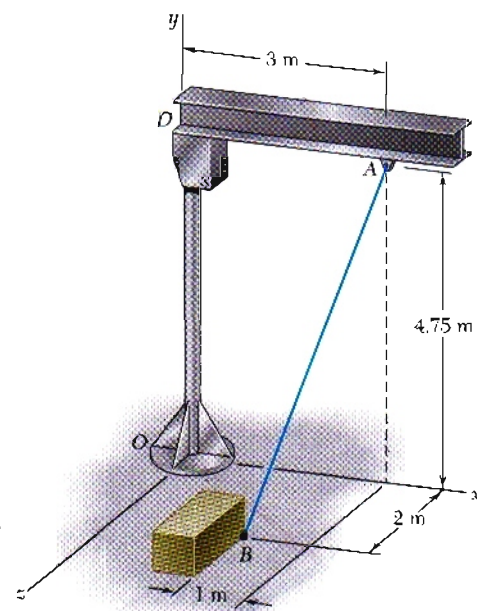


Figura P3.93

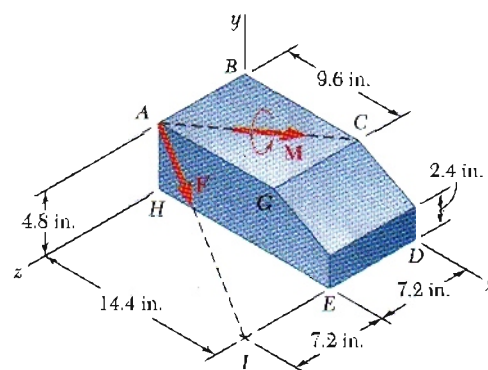


Figura P3.95

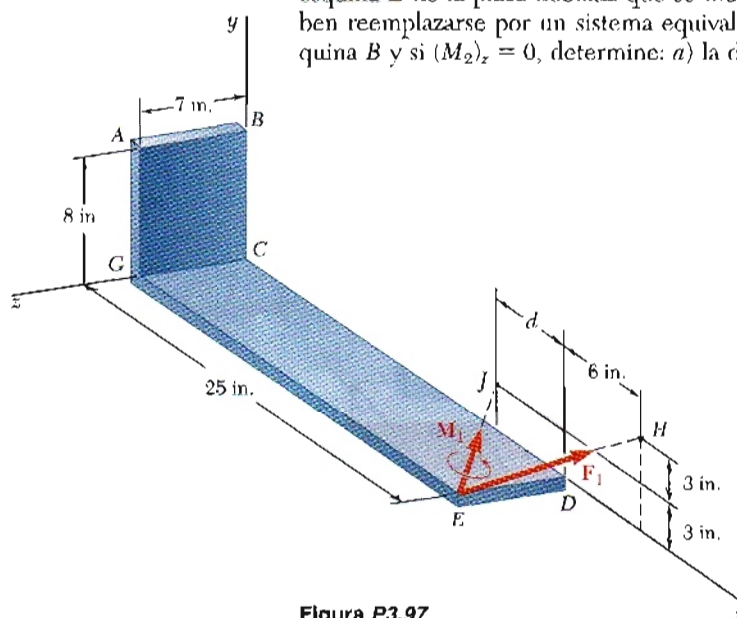


Figura P3.97

3.17. REDUCCIÓN DE UN SISTEMA DE FUERZAS A UNA FUERZA Y UN PAR

Considérese un sistema de fuerzas $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3, \dots$ que actúan sobre un cuerpo rígido en los puntos A_1, A_2, A_3, \dots definidos por los vectores de posición $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3, \dots$ (figura 3.41a). Como se vio en la sección anterior, \mathbf{F}_1 puede ser trasladada de A_1 a un punto dado O , si se agrega al sistema original de fuerzas un par de momento \mathbf{M}_1 , igual al momento $\mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_1$ de \mathbf{F}_1 con respecto a O . Si se repite este procedimiento con $\mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3, \dots$, se obtiene el sistema mostrado en la figura 3.41b, que consta de: las fuerzas originales, ahora actuando en O , y los vectores de par que han sido agregados. Como ahora las fuerzas son concurrentes, pueden ser sumadas vectorialmente y reemplazadas por su resultante \mathbf{R} . De manera similar, los vectores de par $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \mathbf{M}_3, \dots$ pueden sumarse vectorialmente y ser reemplazados por un solo vector de par \mathbf{M}_O^R . Por tanto, cualquier sistema de fuerzas, sin importar qué tan complejo sea, puede ser reducido a un sistema equivalente fuerza-par que actúa en un punto dado O (figura 3.41c). Se debe observar que mientras cada uno de los vectores de par $\mathbf{M}_1, \mathbf{M}_2, \mathbf{M}_3, \dots$, en la figura 3.41b es perpendicular a la fuerza que le corresponde, en general la fuerza resultante \mathbf{R} y el vector de par resultante \mathbf{M}_O^R en la figura 3.41c no serán perpendiculares entre sí.

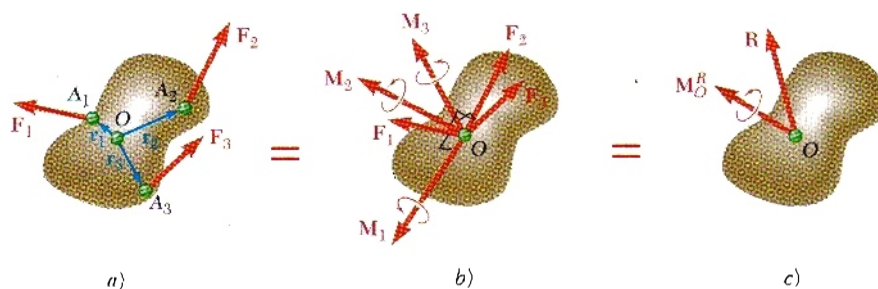


Figura 3.41

$$\mathbf{R} = \Sigma \mathbf{F} \quad \mathbf{M}_O^R = \Sigma \mathbf{M}_O = \Sigma (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) \quad (3.52)$$

las cuales expresan que la fuerza \mathbf{R} se obtiene sumando todas las fuerzas del sistema, mientras que el momento del vector de par resultante \mathbf{M}_O^R , denominado *momento resultante* del sistema, se obtiene sumando los momentos de todas las fuerzas del sistema con respecto a O .

Una vez que un sistema de fuerzas dado se ha reducido a una fuerza y un par que actúa en el punto O , dicho sistema puede reducirse a una fuerza y un par actuando en cualquier otro punto O' . Mientras que la fuerza resultante \mathbf{R} permanecerá inalterada, el nuevo momento resultante $\mathbf{M}_{O'}^R$ será igual a la suma de \mathbf{M}_O^R y el momento con respecto a O' de la fuerza \mathbf{R} unida a O (figura 3.42). Entonces se tiene

$$\mathbf{M}_{O'}^R = \mathbf{M}_O^R + \mathbf{s} \times \mathbf{R} \quad (3.53)$$

En la práctica, la reducción de un sistema de fuerzas dado a una sola fuerza \mathbf{R} actuando en O y un vector de par \mathbf{M}_O^R será llevada a cabo en términos de las componentes. Descomponiendo cada vector \mathbf{r} y cada fuerza \mathbf{F} del sistema en sus componentes rectangulares, se escribe

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \quad (3.54)$$

$$\mathbf{F} = F_x\mathbf{i} + F_y\mathbf{j} + F_z\mathbf{k} \quad (3.55)$$

Al sustituir \mathbf{r} y \mathbf{F} en (3.52) y factorizar a los vectores unitarios \mathbf{i} , \mathbf{j} y \mathbf{k} , se obtiene la siguiente expresión para \mathbf{R} y \mathbf{M}_O^R :

$$\mathbf{R} = R_x\mathbf{i} + R_y\mathbf{j} + R_z\mathbf{k} \quad \mathbf{M}_O^R = M_x^R\mathbf{i} + M_y^R\mathbf{j} + M_z^R\mathbf{k} \quad (3.56)$$

Las componentes R_x , R_y , R_z representan, respectivamente, las sumas de las componentes x , y y z de las fuerzas dadas y miden la tendencia del sistema a impartir al cuerpo rígido un movimiento de traslación en la dirección de x , y o z . Asimismo, las componentes M_x^R , M_y^R , M_z^R representan la suma de los momentos de las fuerzas dadas con respecto a, respectivamente, los ejes x , y y z y miden la tendencia del sistema a impartir al cuerpo rígido un movimiento de rotación alrededor de los ejes, x , y o z .

Si se desea conocer la magnitud y la dirección de la fuerza \mathbf{R} , éstas se pueden obtener a partir de las componentes R_x , R_y y R_z por medio de las relaciones (2.18) y (2.19) de la sección 2.12; cálculos similares proporcionarán la magnitud y la dirección del vector de par \mathbf{M}_O^R .

3.18. SISTEMAS EQUIVALENTES DE FUERZAS

En la sección anterior se vio que cualquier sistema de fuerzas que actúa sobre un cuerpo rígido puede reducirse a un sistema fuerza-par actuando en un punto dado O . Este sistema equivalente fuerza-par caracteriza completamente el efecto del sistema de fuerzas dado sobre el cuerpo rígido. *Por tanto, dos sistemas de fuerzas son equivalentes si pueden ser reducidos al mismo sistema fuerza-par en un punto dado O .* Recuerdese que el sistema fuerza par en O se define por medio de las relaciones (3.52), se establece que *dos sistemas de fuerzas \mathbf{F}_1 , \mathbf{F}_2 ,*

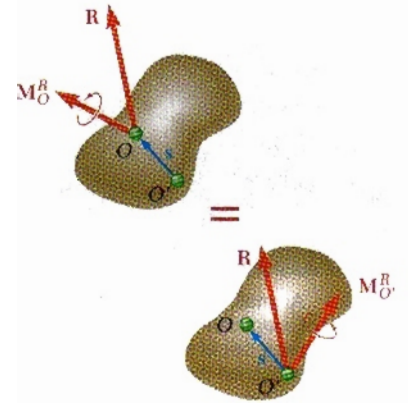


Figura 3.42



Fotografía 3.3 Al analizar el movimiento del barco, las fuerzas ejercidas sobre éste por la cuerda de remolque y por el remolcador de la parte trasera se pueden reemplazar por un sistema equivalente fuerza-par.

$\mathbf{F}_3, \dots, \mathbf{F}'_1, \mathbf{F}'_2, \mathbf{F}'_3, \dots$, que actúan sobre el mismo cuerpo rígido son equivalentes si, y sólo si, respectivamente, las sumas de las fuerzas y las sumas de los momentos con respecto a un punto dado O de las fuerzas de los dos sistemas son iguales. Expresadas en forma matemática, las condiciones necesarias y suficientes para que los dos sistemas de fuerzas sean equivalentes son las siguientes

$$\Sigma \mathbf{F} = \Sigma \mathbf{F}' \quad \text{y} \quad \Sigma \mathbf{M}_O = \Sigma \mathbf{M}'_O \quad (3.57)$$

Obsérvese que para demostrar que dos sistemas de fuerzas son equivalentes, la segunda de las relaciones (3.57) se debe establecer con respecto a un solo punto O . Sin embargo, ésta se cumplirá con respecto a cualquier punto si los dos sistemas de fuerzas son equivalentes.

Al descomponer las fuerzas y los momentos de (3.57) en sus elementos rectangulares, pueden expresarse las condiciones necesarias y suficientes para la equivalencia de dos sistemas de fuerzas que actúan sobre un cuerpo rígido de la siguiente manera:

$$\begin{array}{lll} \Sigma F_x = \Sigma F'_x & \Sigma F_y = \Sigma F'_y & \Sigma F_z = \Sigma F'_z \\ \Sigma M_x = \Sigma M'_x & \Sigma M_y = \Sigma M'_y & \Sigma M_z = \Sigma M'_z \end{array} \quad (3.58)$$

Estas ecuaciones tienen una interpretación física simple; expresan que dos sistemas de fuerzas son equivalentes si tienden a impartirle al cuerpo rígido 1) la misma traslación en las direcciones de x , y y z y 2) la misma rotación alrededor de los ejes x , y y z respectivamente.

3.19. SISTEMAS EQUIPOLENTES DE VECTORES

Cuando dos sistemas de vectores satisfacen las ecuaciones (3.57) o (3.58), esto es, cuando respectivamente sus resultantes y sus momentos resultantes con respecto a un punto arbitrario O son iguales, se dice que los dos sistemas son *equipolentes*. Por tanto, el resultado que se acaba de establecer en la sección anterior se puede enunciar como sigue: *si dos sistemas de fuerzas que actúan sobre un cuerpo rígido son equipolentes, entonces ambos también son equivalentes*.

Es importante señalar que este enunciado no se aplica a cualquier sistema de vectores. Considérese, por ejemplo, un sistema de fuerzas que actúan sobre un conjunto independiente de partículas que no forman un cuerpo rígido. Es posible que un sistema de fuerzas diferentes que actúan sobre las mismas partículas pueda ser equipolente al primero, esto es, que dicho sistema tenga la misma resultante y el mismo momento resultante. Sin embargo, como ahora actuarán diferentes fuerzas sobre cada una de las partículas, los efectos de dichas fuerzas sobre estas partículas serán diferentes; en un caso similar, aunque los dos sistemas de fuerzas sean equipolentes, *no son equivalentes*.

3.20. OTRAS REDUCCIONES DE UN SISTEMA DE FUERZAS

En la sección 3.17 se vio que cualquier sistema de fuerzas que actúa sobre un cuerpo rígido puede ser reducido a un sistema equivalente fuerza-par en O , que consta de una fuerza \mathbf{R} igual a la suma de fuer-

zas del sistema y de un vector de par M_O^R cuyo momento es igual al momento resultante del sistema.

Cuando $R = 0$, el sistema fuerza-par se reduce a un vector de par M_O^R . Entonces, el sistema de fuerzas dado puede ser reducido a un solo par, que recibe el nombre de *par resultante* del sistema.

A continuación se procede a investigar las condiciones necesarias para que un sistema dado de fuerzas pueda ser reducido a una sola fuerza. A partir de la sección 3.16 se concluye que un sistema fuerza-par en O puede ser reemplazado por una sola fuerza R que actúa a lo largo de una nueva línea de acción si R y M_O^R son mutuamente perpendiculares. Por tanto, los sistemas de fuerzas que pueden ser reducidos a una sola fuerza o *resultante*, son aquellos sistemas para los cuales la fuerza R y el vector de par M_O^R son mutuamente perpendiculares. Aunque, *en general*, esta condición *no se cumplirá* para sistemas de fuerzas en el espacio, *sí se cumplirá* para sistemas constituidos por 1) fuerzas concurrentes, 2) fuerzas coplanares o 3) fuerzas paralelas. Estos tres casos se estudiarán en forma separada.

1. Las *fuerzas concurrentes* están aplicadas en el mismo punto y, por tanto, pueden ser sumadas directamente para obtener su resultante R . Por consiguiente, éstas siempre se reducen a una sola fuerza. Las fuerzas concurrentes se analizan en detalle en el capítulo 2.
2. Las *fuerzas coplanares* actúan en el mismo plano, el cual se puede suponer que es el plano de la figura (figura 3.43a). La suma R de las fuerzas del sistema también estará en el plano de la figura, mientras que el momento de cada fuerza con respecto al O y, por consiguiente, el momento resultante M_O^R , serán perpendiculares a dicho plano. De esta forma, el sistema fuerza-par en O está constituido por una fuerza R y por un vector de par M_O^R que son mutuamente perpendiculares (figura 3.43b).¹ Estas fuerzas pueden reducirse a una sola fuerza R , moviendo R en el plano de la figura hasta que su momento con respecto a O sea igual a M_O^R . La distancia desde O hasta la línea de acción de R es $d = M_O^R/R$ (figura 3.43c).



Fotografía 3.4 Las fuerzas coplanares ejercidas por los cuatro remolcadores sobre el barco estadounidense *Pasadena* podrían reemplazarse con una sola fuerza equivalente ejercida por un remolcador.

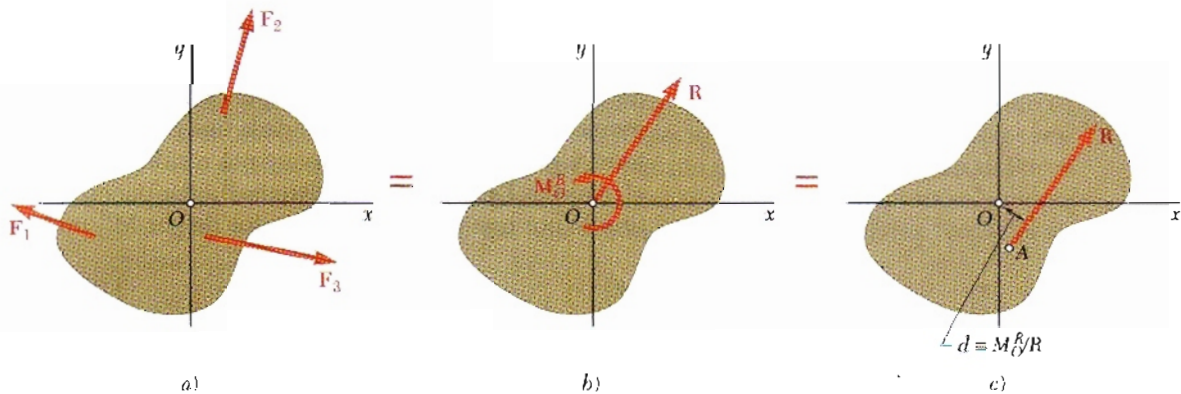


Figura 3.43

¹ Como el vector M_O^R es perpendicular al plano de la figura, éste se ha representado por el símbolo \curvearrowright . Un par con sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj \curvearrowright representa a un vector que apunta hacia fuera del plano de papel y un par con el sentido de las manecillas del reloj \curvearrowleft representa a un vector que apunta hacia adentro del plano de papel.

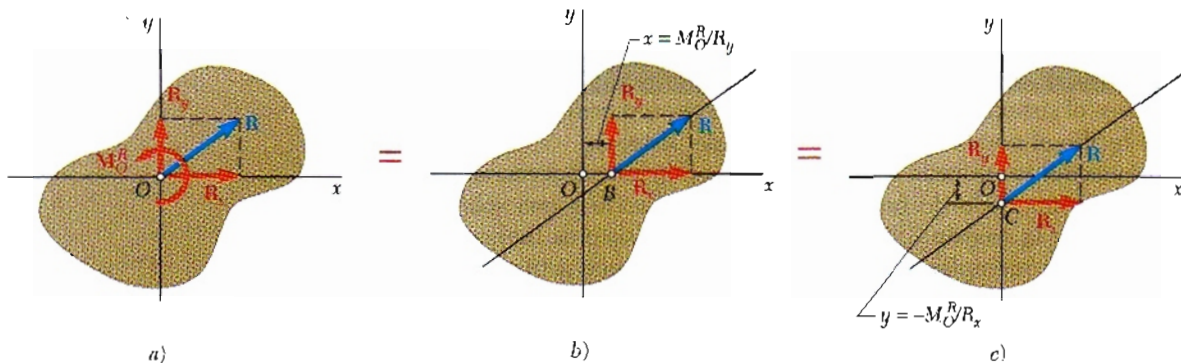


Figura 3.44

Como se señaló en la sección 3.17, la reducción de un sistema de fuerzas se simplifica considerablemente si las fuerzas se descomponen en sus componentes rectangulares. De esta manera, el sistema fuerza-par en O está caracterizado por las componentes (figura 3.44a).

$$R_x = \Sigma F_x \quad R_y = \Sigma F_y \quad M_O^R = M_O^R = \Sigma M_O \quad (3.59)$$

Para reducir el sistema de fuerzas a una sola fuerza \mathbf{R} , se expresa que el momento de \mathbf{R} con respecto a O debe ser igual a \mathbf{M}_O^R . Representando con x y y las coordenadas del punto de aplicación de la resultante y teniendo en cuenta la fórmula (3.22) de la sección 3.8, se escribe

$$xR_y - yR_x = M_O^R$$

la cual representa la ecuación de la línea de acción de \mathbf{R} . También pueden determinarse en forma directa las intersecciones con el eje x y con el eje y de la línea de acción de la resultante, se observa que \mathbf{M}_O^R debe ser igual al momento con respecto a O de la componente y de \mathbf{R} cuando \mathbf{R} está unida a B (figura 3.44b) e igual también al momento de la componente x cuando \mathbf{R} está unida a C (figura 3.44c).

3. Las *fuerzas paralelas* tienen líneas de acción paralelas y pueden o no tener el mismo sentido. Suponga que las fuerzas son paralelas al eje y (figura 3.45a), se observa que su suma \mathbf{R} también será paralela al eje y . Por otra parte, como el momento de una fuerza dada debe ser perpendicular a dicha fuerza, el momento con respecto a O de cada una de las fuerzas del sistema y, por consiguiente, el momento resultante \mathbf{M}_O^R estará en el plano zx . De esta forma el sistema fuerza-par en O está constituido por una fuerza \mathbf{R} y un vector de par \mathbf{M}_O^R mutuamente

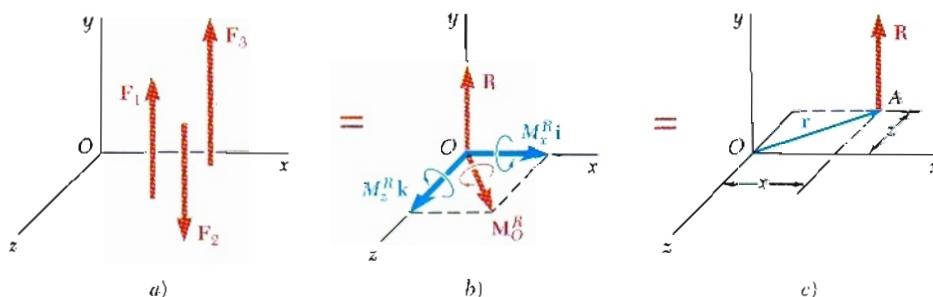


Figura 3.45

perpendiculares (figura 3.45b). Estas fuerzas se pueden reducir a una sola fuerza \mathbf{R} (figura 3.45c) o, si $\mathbf{R} = 0$, a un solo par cuyo momento sea igual a \mathbf{M}_O^R .

En la práctica, el sistema fuerza-par en O está caracterizado por las componentes

$$R_y = \Sigma F_y \quad M_x^R = \Sigma M_x \quad M_z^R = \Sigma M_z \quad (3.60)$$

La reducción del sistema a una sola fuerza puede efectuarse moviendo \mathbf{R} a un nuevo punto de aplicación $A(x, 0, z)$ seleccionado de manera que el momento de \mathbf{R} con respecto a O sea igual a \mathbf{M}_O^R , el cual se escribe

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \times \mathbf{R} &= \mathbf{M}_O^R \\ (xi + zk) \times R_y \mathbf{j} &= M_x^R \mathbf{i} + M_z^R \mathbf{k} \end{aligned}$$

Al calcular los productos vectoriales e igualar los coeficientes de los vectores unitarios correspondientes en ambos miembros de la ecuación se obtienen dos ecuaciones escalares que definen las coordenadas de A :

$$-zR_y = M_x^R \quad xR_y = M_z^R$$

Estas ecuaciones expresan que los momentos de \mathbf{R} con respecto a los ejes x y z deben ser iguales a M_x^R y M_z^R , respectivamente.

*3.21. REDUCCIÓN DE UN SISTEMA DE FUERZAS A UNA LLAVE DE TORSIÓN O TORSOR

En el caso general de un sistema de fuerzas en el espacio, el sistema equivalente fuerza-par en O consta de una fuerza \mathbf{R} y un vector de par \mathbf{M}_O^R , ambos distintos de cero, que no son perpendiculares entre sí (figura 3.46a). Por tanto, el sistema de fuerzas *no puede* ser reducido a una sola fuerza o a un solo par. Sin embargo, el vector de par puede ser reemplazado por otros dos vectores de par obtenidos al descomponer \mathbf{M}_O^R en una componente \mathbf{M}_1 a lo largo de \mathbf{R} y una componente \mathbf{M}_2 en un plano perpendicular a \mathbf{R} (figura 3.46b). Entonces, el vector de par \mathbf{M}_2 y la fuerza \mathbf{R} pueden reemplazarse por una sola fuerza \mathbf{R} que actúa a lo largo de una nueva línea de acción. Por tanto, el sistema original de fuerzas se reduce a \mathbf{R} y al par vector \mathbf{M}_1 (figura 3.46c), de esta forma, el sistema se reduce a \mathbf{R} y un par que actúa en el plano perpendicular a \mathbf{R} . A este sistema fuerza-par, en particular, se le conoce como *llave de torsión* debido a que la combinación resultante de empuje y torsión es la misma que se encuentra en las operaciones de per-



Fotografía 3.5 Las fuerzas paralelas del viento que actúan sobre los señalamientos de la carretera, pueden reducirse a una sola fuerza equivalente. La determinación de esta fuerza puede simplificar el cálculo de las fuerzas que actúan sobre los soportes del marco que sostiene los señalamientos.

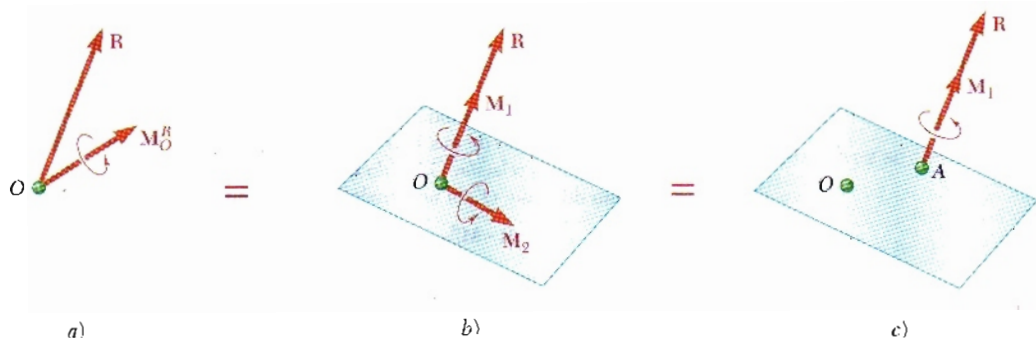


Figura 3.46

foración y enroscado, así como en apretar o aflojar tornillos. A la línea de acción de \mathbf{R} se le conoce como *eje de la llave de torsión* y a la razón $p = M_1/R$ se le denomina *paso* de la llave de torsión. Por consiguiente, una llave de torsión está constituida por dos vectores colineales, específicamente, una fuerza \mathbf{R} y un vector de par

$$\mathbf{M}_1 = p\mathbf{R} \quad (3.61)$$

Recuerde la expresión (3.35), obtenida en la sección 3.9 para la proyección de un vector sobre la línea de acción de otro vector, se observa que la proyección de \mathbf{M}_O^R sobre la línea de acción de \mathbf{R} es igual a

$$M_1 = \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_O^R}{R}$$

Por tanto, el paso de una llave de torsión puede ser expresado como⁴

$$p = \frac{M_1}{R} = \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_O^R}{R^2} \quad (3.62)$$

Para definir el eje de una llave de torsión se puede escribir una relación que involucre al vector de posición \mathbf{r} de un punto arbitrario P localizado sobre dicho eje. Fijando la fuerza resultante \mathbf{R} y el vector de par \mathbf{M}_1 en P (figura 3.47) y expresando que el momento con respecto a O de este sistema fuerza-par, es igual al momento resultante \mathbf{M}_O^R del sistema original de fuerzas, se escribe

$$\mathbf{M}_1 + \mathbf{r} \times \mathbf{R} = \mathbf{M}_O^R \quad (3.63)$$

o, de acuerdo con la ecuación (3.61),

$$p\mathbf{R} + \mathbf{r} \times \mathbf{R} = \mathbf{M}_O^R \quad (3.64)$$



Fotografía 3.6 La acción de empujar y girar, asociadas con la operación de apretar un tornillo ilustra las líneas de acción colineales de la fuerza y el vector de par que constituyen una llave de torsión o tisor.

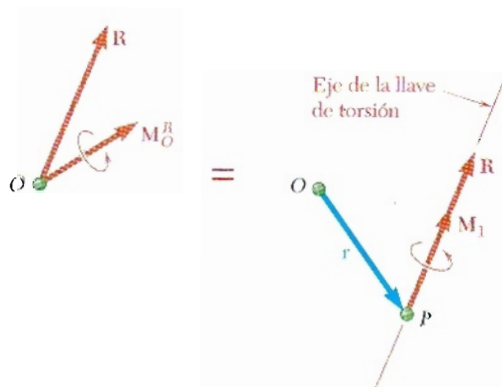


Figura 3.47

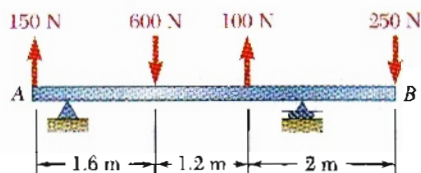
⁴Las expresiones obtenidas para la proyección del vector de par sobre la línea de acción de \mathbf{R} y para el paso de una llave de torsión son independientes de la selección del punto O . Utilizando la relación (3.53) de la sección 3.17, se observa que si se hubiera empleado un punto diferente O' , el numerador en (3.62) hubiera sido

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_{O'}^R = \mathbf{R} \cdot (\mathbf{M}_O^R + \mathbf{s} \times \mathbf{R}) = \mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_O^R + \mathbf{R} \cdot (\mathbf{s} \times \mathbf{R})$$

Como el triple producto escalar $\mathbf{R} \cdot (\mathbf{s} \times \mathbf{R})$ es igual a cero, se tiene que

$$\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_{O'}^R = \mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_O^R$$

Por tanto, el producto escalar $\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_O^R$ es independiente de la selección del punto O



PROBLEMA RESUELTO 3.8

Una viga de 4.80 m de longitud está sujeta a las fuerzas mostradas en la figura. Redúzcase el sistema de fuerzas dado a: a) un sistema equivalente fuerza-par en A, b) un sistema equivalente fuerza-par en B y c) una sola fuerza o resultante.

Nota: Como las reacciones en los apoyos no están incluidas en el sistema de fuerzas dado, el sistema no mantendrá la viga en equilibrio.

SOLUCIÓN

a) **Sistema fuerza-par en A.** El sistema fuerza-par en A equivalente al sistema de fuerzas dado consta de una fuerza \mathbf{R} y de un par \mathbf{M}_A^R definidos como sigue:

$$\begin{aligned}\mathbf{R} &= \Sigma \mathbf{F} \\ &= (150 \text{ N})\mathbf{j} - (600 \text{ N})\mathbf{j} + (100 \text{ N})\mathbf{j} - (250 \text{ N})\mathbf{j} = -(600 \text{ N})\mathbf{j} \\ \mathbf{M}_A^R &= \Sigma (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) \\ &= (1.6\mathbf{i}) \times (-600\mathbf{j}) + (2.8\mathbf{i}) \times (100\mathbf{j}) + (4.8\mathbf{i}) \times (-250\mathbf{j}) \\ &= -(1\,880 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k}\end{aligned}$$

Por tanto, el sistema equivalente fuerza-par en A está dado por

$$\mathbf{R} = 600 \text{ N} \downarrow \quad \mathbf{M}_A^R = 1\,880 \text{ N} \cdot \text{m} \downarrow \quad \blacktriangleleft$$

b) **Sistema fuerza-par en B.** Se pretende encontrar un sistema fuerza-par en B equivalente al sistema fuerza-par en A determinado en el inciso a). La fuerza \mathbf{R} permanece inalterada, pero se debe determinar un nuevo par \mathbf{M}_B^R cuyo momento sea igual al momento con respecto a B del sistema fuerza-par encontrado en el inciso a). Por tanto, se tiene que

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_B^R &= \mathbf{M}_A^R + \overline{BA} \times \mathbf{R} \\ &= -(1\,880 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k} + (-4.8 \text{ m})\mathbf{i} \times (-600 \text{ N})\mathbf{j} \\ &= -(1\,880 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k} + (2\,880 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k} = +(1\,000 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k}\end{aligned}$$

De esta forma, el sistema fuerza-par en B está dado por

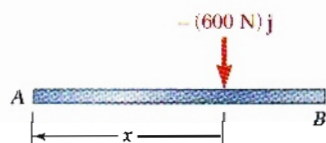
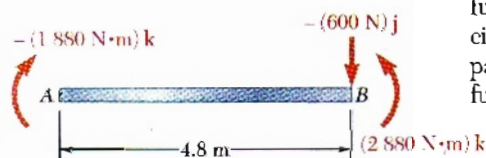
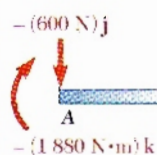
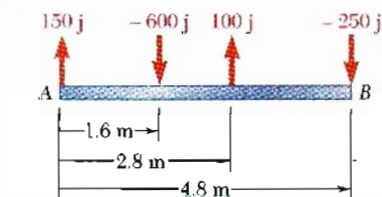
$$\mathbf{R} = 600 \text{ N} \downarrow \quad \mathbf{M}_B^R = 1\,000 \text{ N} \cdot \text{m} \uparrow \quad \blacktriangleleft$$

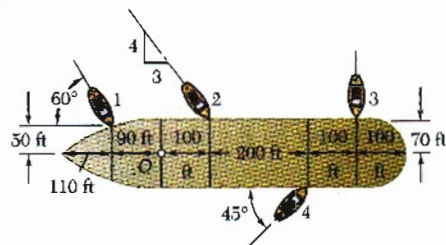
c) **Fuerza única o resultante.** La resultante del sistema de fuerzas dado es igual a \mathbf{R} y su punto de aplicación debe ser tal que el momento de \mathbf{R} con respecto a A sea igual a \mathbf{M}_A^R . El cual se escribe

$$\begin{aligned}\mathbf{r} \times \mathbf{R} &= \mathbf{M}_A^R \\ x\mathbf{i} \times (-600 \text{ N})\mathbf{j} &= -(1\,880 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k} \\ -x(600 \text{ N})\mathbf{k} &= -(1\,880 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k}\end{aligned}$$

y se concluye que $x = 3.13 \text{ m}$. Por tanto, la fuerza única equivalente al sistema dado está definida como

$$\mathbf{R} = 600 \text{ N} \downarrow \quad x = 3.13 \text{ m} \quad \blacktriangleleft$$





PROBLEMA RESUELTO 3.9

Se usan cuatro remolcadores para llevar a un trasatlántico a su muelle. Cada remolcador ejerce una fuerza de 5 000 lb en la dirección mostrada en la figura. Determine: a) el sistema equivalente fuerza-par en el mástil mayor O y b) el punto sobre el casco donde un solo remolcador más potente debería empujar al barco para producir el mismo efecto que los cuatro remolcadores originales.

SOLUCIÓN

a) Sistema fuerza-par en O. Cada una de las fuerzas se descompone en sus componentes en el diagrama mostrado (las unidades empleadas son kips). El sistema fuerza-par en O equivalente al sistema de fuerzas dado consta de una fuerza \mathbf{R} y de un par \mathbf{M}_O^R definidos como sigue:

$$\begin{aligned}\mathbf{R} &= \Sigma \mathbf{F} \\ &= (2.50\mathbf{i} - 4.33\mathbf{j}) + (3.00\mathbf{i} - 4.00\mathbf{j}) + (-5.00\mathbf{j}) + (3.54\mathbf{i} + 3.54\mathbf{j}) \\ &= 9.04\mathbf{i} - 9.79\mathbf{j}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{M}_O^R &= \Sigma (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) \\ &= (-90\mathbf{i} + 50\mathbf{j}) \times (2.50\mathbf{i} - 4.33\mathbf{j}) \\ &\quad + (100\mathbf{i} + 70\mathbf{j}) \times (3.00\mathbf{i} - 4.00\mathbf{j}) \\ &\quad + (400\mathbf{i} + 70\mathbf{j}) \times (-5.00\mathbf{j}) \\ &\quad + (300\mathbf{i} - 70\mathbf{j}) \times (3.54\mathbf{i} + 3.54\mathbf{j}) \\ &= (390 - 125 - 400 - 210 - 2\,000 + 1\,062 + 248)\mathbf{k} \\ &= -1\,035\mathbf{k}\end{aligned}$$

Por tanto, el sistema equivalente fuerza-par en O está dado por

$$\mathbf{R} = (9.04 \text{ kips})\mathbf{i} - (9.79 \text{ kips})\mathbf{j} \quad \mathbf{M}_O^R = -(1\,035 \text{ kips} \cdot \text{ft})\mathbf{k}$$

$$\text{o} \quad \mathbf{R} = 13.33 \text{ kips} \angle 47.3^\circ \quad \mathbf{M}_O^R = 1\,035 \text{ kips} \cdot \text{ft} \downarrow \quad \blacktriangleleft$$

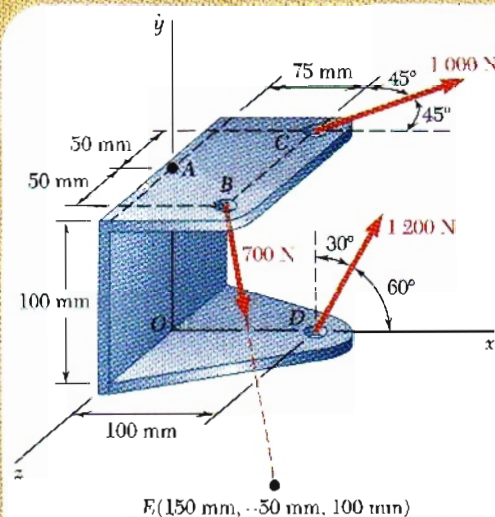
Comentario. Como todas las fuerzas están contenidas en el plano de la figura, podría haberse anticipado que la suma de sus momentos iba a ser perpendicular a dicho plano. Obsérvese que el momento de la componente de cada fuerza pudo obtenerse directamente a partir del diagrama mostrado que forma, primero, el producto de la magnitud de dicha componente con una distancia perpendicular hasta O y luego le asigna a este producto un signo positivo o negativo según el sentido del momento.

b) Remolcador único. La fuerza ejercida por un solo remolcador debe ser igual a \mathbf{R} y su punto de aplicación A debe ser tal que el momento de \mathbf{R} con respecto a O sea igual a \mathbf{M}_O^R . Si se observa que el vector de posición de A es

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + 70\mathbf{j}$$

se escribe

$$\begin{aligned}\mathbf{r} \times \mathbf{R} &= \mathbf{M}_O^R \\ (x\mathbf{i} + 70\mathbf{j}) \times (9.04\mathbf{i} - 9.79\mathbf{j}) &= -1\,035\mathbf{k} \\ -x(9.79)\mathbf{k} - 633\mathbf{k} &= -1\,035\mathbf{k} \quad x = 41.1 \text{ ft} \quad \blacktriangleleft\end{aligned}$$



PROBLEMA RESUELTO 3.10

Tres cables están unidos a una ménsula, como se muestra en la figura. Reemplace las fuerzas que ejercen los cables por un sistema equivalente fuerza-par en A.

SOLUCIÓN

Primero se determinan los vectores de posición relativa trazados desde el punto A hasta los puntos de aplicación de cada una de las fuerzas y se descomponen las fuerzas en sus componentes rectangulares. Observe que $\mathbf{F}_B = (700 \text{ N})\lambda_{BE}$, donde

$$\lambda_{BE} = \frac{\overline{BE}}{BE} = \frac{75\mathbf{i} - 150\mathbf{j} + 50\mathbf{k}}{175}$$

Con el uso de metros y newtons se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{B/A} &= \overline{AB} = 0.075\mathbf{i} + 0.050\mathbf{k} & \mathbf{F}_B &= 300\mathbf{i} - 600\mathbf{j} + 200\mathbf{k} \\ \mathbf{r}_{C/A} &= \overline{AC} = 0.075\mathbf{i} - 0.050\mathbf{k} & \mathbf{F}_C &= 707\mathbf{i} - 707\mathbf{k} \\ \mathbf{r}_{D/A} &= \overline{AD} = 0.100\mathbf{i} - 0.100\mathbf{j} & \mathbf{F}_D &= 600\mathbf{i} + 1039\mathbf{j} \end{aligned}$$

El sistema fuerza-par en A, equivalente al sistema de fuerzas dado, consta de una fuerza $\mathbf{R} = \Sigma \mathbf{F}$ y de un par $\mathbf{M}_A^R = \Sigma (\mathbf{r} \times \mathbf{F})$. La fuerza \mathbf{R} se obtiene fácil al sumar, respectivamente, las componentes x , y y z de las fuerzas:

$$\mathbf{R} = \Sigma \mathbf{F} = (1607 \text{ N})\mathbf{i} + (439 \text{ N})\mathbf{j} - (507 \text{ N})\mathbf{k} \quad \blacktriangleleft$$

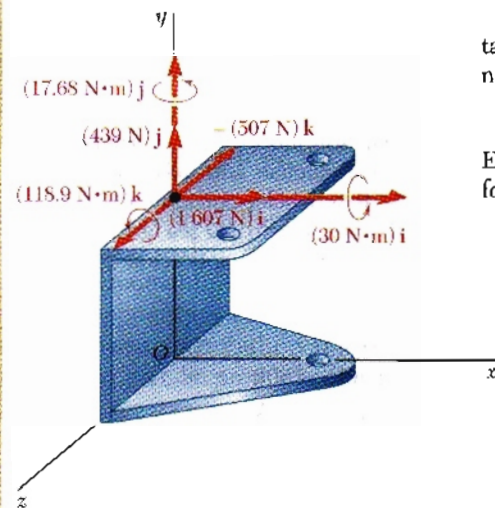
El cálculo de \mathbf{M}_A^R se simplifica si los momentos de las fuerzas se expresan en forma de determinantes (sección 3.8):

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{B/A} \times \mathbf{F}_B &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0.075 & 0 & 0.050 \\ 300 & -600 & 200 \end{vmatrix} = 30\mathbf{i} - 45\mathbf{k} \\ \mathbf{r}_{C/A} \times \mathbf{F}_C &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0.075 & 0 & -0.050 \\ 707 & 0 & -707 \end{vmatrix} = 17.68\mathbf{j} \\ \mathbf{r}_{D/A} \times \mathbf{F}_D &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0.100 & -0.100 & 0 \\ 600 & 1039 & 0 \end{vmatrix} = 163.9\mathbf{k} \end{aligned}$$

Con la suma de las expresiones obtenidas, se tiene

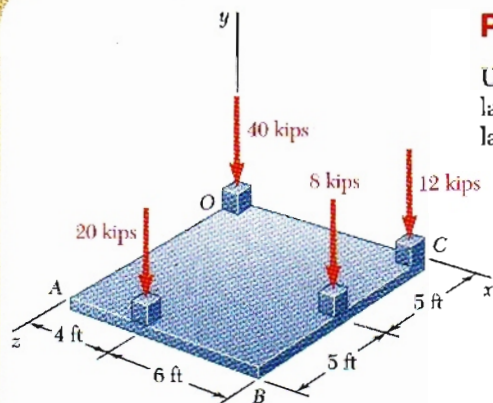
$$\mathbf{M}_A^R = \Sigma (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = (30 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{i} + (17.68 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{j} + (118.9 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k} \quad \blacktriangleleft$$

Las componentes rectangulares de la fuerza \mathbf{R} y del par \mathbf{M}_A^R se muestran en el croquis adjunto.



PROBLEMA RESUELTO 3.11

Una losa de cimentación cuadrada soporta las cuatro columnas mostradas en la figura. Determine la magnitud y el punto de aplicación de la resultante de las cuatro cargas.

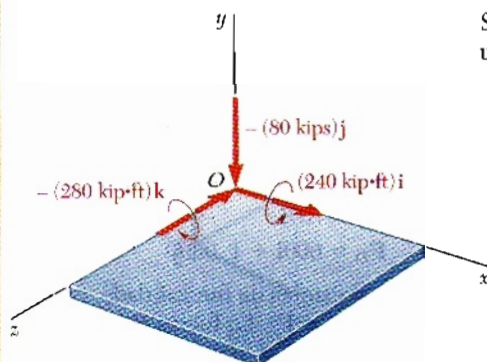


SOLUCIÓN

Primero, el sistema de fuerzas se reduce a un sistema fuerza-par en el origen del sistema de coordenadas O . Este sistema fuerza-par consta de una fuerza \mathbf{R} y un vector de par \mathbf{M}_O^R que se definen de la siguiente forma:

$$\mathbf{R} = \Sigma \mathbf{F} \quad \mathbf{M}_O^R = \Sigma (\mathbf{r} \times \mathbf{F})$$

Se determinan los vectores de posición de los puntos de aplicación de cada una de las fuerzas y los cálculos se arreglan en forma tabular.



\mathbf{r} , ft	\mathbf{F} , kips	$\mathbf{r} \times \mathbf{F}$, kip · ft
0	$-40\mathbf{j}$	0
$10\mathbf{i}$	$-12\mathbf{j}$	$-120\mathbf{k}$
$10\mathbf{i} + 5\mathbf{k}$	$-8\mathbf{j}$	$40\mathbf{i} - 80\mathbf{k}$
$4\mathbf{i} + 10\mathbf{k}$	$-20\mathbf{j}$	$200\mathbf{i} - 80\mathbf{k}$
	$\mathbf{R} = -80\mathbf{j}$	$\mathbf{M}_O^R = 240\mathbf{i} - 280\mathbf{k}$

Como la fuerza \mathbf{R} y el vector de par \mathbf{M}_O^R son mutuamente perpendiculares, el sistema fuerza-par obtenido puede reducirse aún más a una sola fuerza \mathbf{R} . El nuevo punto de aplicación de \mathbf{R} será seleccionado en el plano de la losa de manera que el momento de \mathbf{R} con respecto a O sea igual a \mathbf{M}_O^R . Si se representa con \mathbf{r} al vector de posición del punto de aplicación deseado y con x y z a sus coordenadas, se escribe

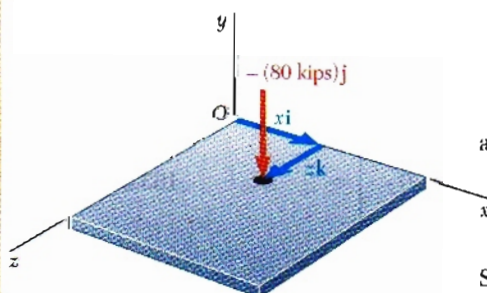
$$\begin{aligned} \mathbf{r} \times \mathbf{R} &= \mathbf{M}_O^R \\ (x\mathbf{i} + z\mathbf{k}) \times (-80\mathbf{j}) &= 240\mathbf{i} - 280\mathbf{k} \\ -80x\mathbf{k} + 80z\mathbf{i} &= 240\mathbf{i} - 280\mathbf{k} \end{aligned}$$

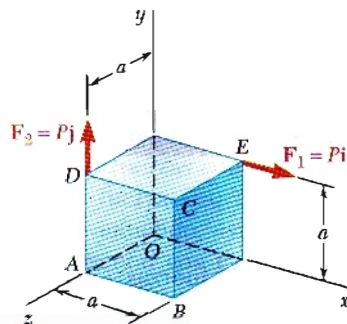
a partir de lo escrito, se encuentra que

$$\begin{aligned} -80x &= -280 & 80z &= 240 \\ x &= 3.50 \text{ ft} & z &= 3.00 \text{ ft} \end{aligned}$$

Se concluye que la resultante del sistema de fuerzas dado es igual a

$$\mathbf{R} = 80 \text{ kips} \downarrow \quad \text{en } x = 3.50 \text{ ft}, z = 3.00 \text{ ft} \quad \blacktriangleleft$$





PROBLEMA RESUELTO 3.12

Dos fuerzas de la misma longitud P actúan sobre un cubo con aristas de igual longitud, como se muestra en la figura. Reemplace las dos fuerzas por una llave de torsión equivalente y determine: a) la magnitud y dirección de la fuerza resultante \mathbf{R} , b) el paso de la llave de torsión y c) el punto donde el eje de la llave de torsión interseca al plano yz .

SOLUCIÓN

Sistema equivalente fuerza-par en O . Primero se determina el sistema equivalente fuerza-par en el origen O . Se observa que los vectores de posición de los puntos de aplicación E y D de las dos fuerzas dadas son: $\mathbf{r}_E = a\mathbf{i} + a\mathbf{j}$ y $\mathbf{r}_D = a\mathbf{j} + a\mathbf{k}$. La resultante \mathbf{R} de las dos fuerzas y el momento resultante \mathbf{M}_O^R de dichas fuerzas con respecto a O están dados por

$$\mathbf{R} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 = P\mathbf{i} + P\mathbf{j} = P(\mathbf{i} + \mathbf{j}) \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_O^R &= \mathbf{r}_E \times \mathbf{F}_1 + \mathbf{r}_D \times \mathbf{F}_2 = (a\mathbf{i} + a\mathbf{j}) \times P\mathbf{i} + (a\mathbf{j} + a\mathbf{k}) \times P\mathbf{j} \\ &= -Pak - Pai = -Pa(\mathbf{i} + \mathbf{k}) \end{aligned} \quad (2)$$

a) **Fuerza resultante \mathbf{R} .** A partir de la ecuación (1) y del croquis adjunto se concluye que la fuerza resultante \mathbf{R} tiene una magnitud $R = P\sqrt{2}$, se encuentra en el plano xy y forma ángulos de 45° con los ejes x y y . Por tanto,

$$R = P\sqrt{2} \quad \theta_x = \theta_y = 45^\circ \quad \theta_z = 90^\circ \quad \blacktriangleleft$$

b) **Paso de la llave de torsión.** De acuerdo con la fórmula (3.62) de la sección 3.21 y las ecuaciones (1) y (2) que se acaban de presentar, se escribe

$$p = \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_O^R}{R^2} = \frac{P(\mathbf{i} + \mathbf{j}) \cdot (-Pa)(\mathbf{i} + \mathbf{k})}{(P\sqrt{2})^2} = \frac{-P^2a(1 + 0 + 0)}{2P^2} \quad p = -\frac{a}{2} \quad \blacktriangleleft$$

c) **Eje de la llave de torsión.** A partir de los resultados anteriores y de la ecuación (3.61), se concluye que la llave de torsión consta de la fuerza \mathbf{R} encontrada en (1) y del vector de par

$$\mathbf{M}_1 = p\mathbf{R} = -\frac{a}{2}P(\mathbf{i} + \mathbf{j}) = -\frac{Pa}{2}(\mathbf{i} + \mathbf{j}) \quad (3)$$

Para determinar el punto donde el eje de la llave de torsión interseca al plano yz , se expresa que el momento de la llave de torsión con respecto a O es igual al momento resultante \mathbf{M}_O^R del sistema original:

$$\mathbf{M}_1 + \mathbf{r} \times \mathbf{R} = \mathbf{M}_O^R$$

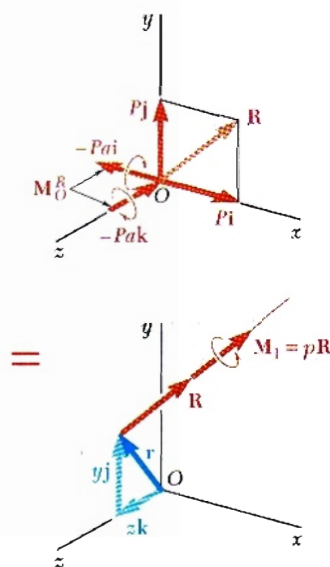
o, al notar que $\mathbf{r} = y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ y sustituir \mathbf{R} , \mathbf{M}_O^R y \mathbf{M}_1 a partir de las ecuaciones (1), (2) y (3),

$$-\frac{Pa}{2}(\mathbf{i} + \mathbf{j}) + (y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \times P(\mathbf{i} + \mathbf{j}) = -Pa(\mathbf{i} + \mathbf{k})$$

$$-\frac{Pa}{2}\mathbf{i} - \frac{Pa}{2}\mathbf{j} - Py\mathbf{k} + Pz\mathbf{j} - Pzi = -Pai - Pak$$

Si se igualan los coeficientes de \mathbf{k} y, después, los coeficientes de \mathbf{j} , se encuentra que

$$y = a \quad z = a/2 \quad \blacktriangleleft$$



RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS EN FORMA INDEPENDIENTE

Esta lección estuvo dedicada a la reducción y simplificación de sistemas de fuerzas. Al momento de resolver los problemas propuestos, se pide que se lleven a cabo las operaciones que se describen a continuación.

1. Reducción de un sistema de fuerzas dado a una fuerza y un par que actúan en un punto dado A. La fuerza \mathbf{R} es la *resultante* del sistema y se obtiene sumando las fuerzas que lo constituyen; el momento del par es el *momento resultante* del sistema y se obtiene sumando los momentos con respecto a A de las fuerzas que lo constituyen. Así, se tiene que

$$\mathbf{R} = \Sigma \mathbf{F} \quad \mathbf{M}_A^R = \Sigma (\mathbf{r} \times \mathbf{F})$$

donde el vector de posición \mathbf{r} se traza desde A hasta *cualquier punto* a lo largo de la línea de acción de \mathbf{F} .

2. Traslación de un sistema fuerza-par desde un punto A hasta un punto B. Si después de que se había reducido a un sistema fuerza-par en el punto A se desea reducir un sistema de fuerzas dado a un sistema fuerza-par en el punto B, no se necesita llevar a cabo el cálculo de los momentos de las fuerzas con respecto a B. La resultante \mathbf{R} permanece inalterada y el nuevo momento resultante \mathbf{M}_B^R se puede obtener sumándole a \mathbf{M}_A^R el momento con respecto a B de la fuerza \mathbf{R} aplicada en A [problema resuelto 3.8]. Si se representa con \mathbf{s} el vector trazado desde B hasta A, se puede escribir

$$\mathbf{M}_B^R = \mathbf{M}_A^R + \mathbf{s} \times \mathbf{R}$$

3. Verificación de que dos sistemas de fuerzas sean equivalentes o no. Primero se reduce cada sistema de fuerzas a un sistema fuerza-par en *el mismo punto arbitrario A* (como se explicó en el párrafo 1). Los dos sistemas son equivalentes (esto es, tienen el mismo efecto sobre el cuerpo rígido en consideración) si los dos sistemas fuerza-par que se obtuvieron son idénticos, esto es, si

$$\Sigma \mathbf{F} = \Sigma \mathbf{F}' \quad \text{y} \quad \Sigma \mathbf{M}_A = \Sigma \mathbf{M}'_A$$

Se debe reconocer que si no se cumple la primera de estas ecuaciones, esto es, si los dos sistemas no tienen la misma resultante \mathbf{R} , estos sistemas no pueden ser equivalentes y, por tanto, no hay necesidad de verificar si se cumple o no la segunda ecuación.

4. Reducción de un sistema de fuerzas dado a una sola fuerza. Primero se reduce el sistema de fuerzas dado a un sistema fuerza-par en un punto conveniente A donde dicho sistema consta de la resultante \mathbf{R} y del vector de par \mathbf{M}_A^R (esto se lleva a cabo como se explicó en el punto 1). Se recordará, de la lección anterior, que es posible reducir aún más el sistema a una sola fuerza *sólo si la fuerza \mathbf{R} y el*

vector de par \mathbf{M}_A^R son mutuamente perpendiculares. Con toda seguridad, éste será el caso para sistemas de fuerzas constituidos por fuerzas que son concurrentes, coplanares o paralelas. En este sentido, la fuerza única que se desea encontrar puede obtenerse del mismo modo que se hizo en varios problemas de la lección anterior, moviendo \mathbf{R} hasta que su momento con respecto a A sea igual a \mathbf{M}_A^R . Con más formalidad se puede escribir que el vector de posición \mathbf{r} trazado desde A hasta cualquier punto a lo largo de la línea de acción de \mathbf{R} debe satisfacer la ecuación

$$\mathbf{r} \times \mathbf{R} = \mathbf{M}_A^R$$

Este procedimiento fue utilizado en los problemas resueltos 3.8, 3.9 y 3.11.

5. Reducción de un sistema de fuerzas dado a una llave de torsión. Si el sistema de fuerzas dado está constituido por fuerzas que son concurrentes, coplanares o paralelas, el sistema equivalente fuerza-par en un punto A consistirá de una fuerza \mathbf{R} y de un vector de par \mathbf{M}_A^R que, en general, *no van a ser mutuamente perpendiculares*. (Para verificar si \mathbf{R} y \mathbf{M}_A^R son mutuamente perpendiculares, se forma su producto escalar. Si este producto es igual a cero, entonces los vectores en cuestión son mutuamente perpendiculares; de lo contrario, no son perpendiculares entre sí.) Si \mathbf{R} y \mathbf{M}_A^R son mutuamente perpendiculares, el sistema fuerza-par (por tanto, el sistema de fuerzas dado) *no se puede reducir a una sola fuerza*. Sin embargo, el sistema se puede reducir a una llave de torsión —la combinación de una fuerza \mathbf{R} y un vector de par \mathbf{M}_1 que están dirigidos a lo largo de una línea de acción común que se conoce como el *eje de la llave de torsión* (figura 3.47)—. El cociente $p = M_1/R$ recibe el nombre de *paso* de la llave de torsión.

Para reducir un sistema de fuerzas dado a una llave de torsión, se deben seguir los siguientes pasos:

a) Reducir el sistema de fuerzas dado a un sistema equivalente fuerza-par ($\mathbf{R}, \mathbf{M}_O^R$), localizado, comúnmente, en el origen O .

b) Determinar el paso p a partir de la ecuación (3.62)

$$p = \frac{M_1}{R} = \frac{\mathbf{R} \cdot \mathbf{M}_O^R}{R^2} \quad (3.62)$$

y el vector de par a partir de $\mathbf{M}_1 = p\mathbf{R}$.

c) Expresar que el momento con respecto a O de la llave de torsión es igual al momento resultante \mathbf{M}_O^R del sistema fuerza-par en O :

$$\mathbf{M}_1 + \mathbf{r} \times \mathbf{R} = \mathbf{M}_O^R \quad (3.63)$$

Esta ecuación permite determinar el punto donde la línea de acción de la llave de torsión interseca un plano especificado puesto que el vector de posición \mathbf{r} está dirigido desde O hasta dicho punto.

Estos pasos se muestran en el problema resuelto 3.12. Aunque pueda parecer difícil la determinación de una llave de torsión y del punto donde su eje interseca a un plano, el proceso es simplemente la aplicación de varias de las ideas y técnicas que han sido desarrolladas en este capítulo. Por tanto, una vez que se ha dominado completamente todo lo relacionado con la llave de torsión, se puede confiar en que se ha comprendido una buena parte del capítulo 3.

Problemas

3.98 Una viga de 5 m de longitud se somete a cierta diversidad de cargas. *a)* Reemplace cada tipo de carga con un sistema equivalente fuerza-par en el extremo B de la viga. *b)* ¿Cuáles de las cargas mostradas son equivalentes?

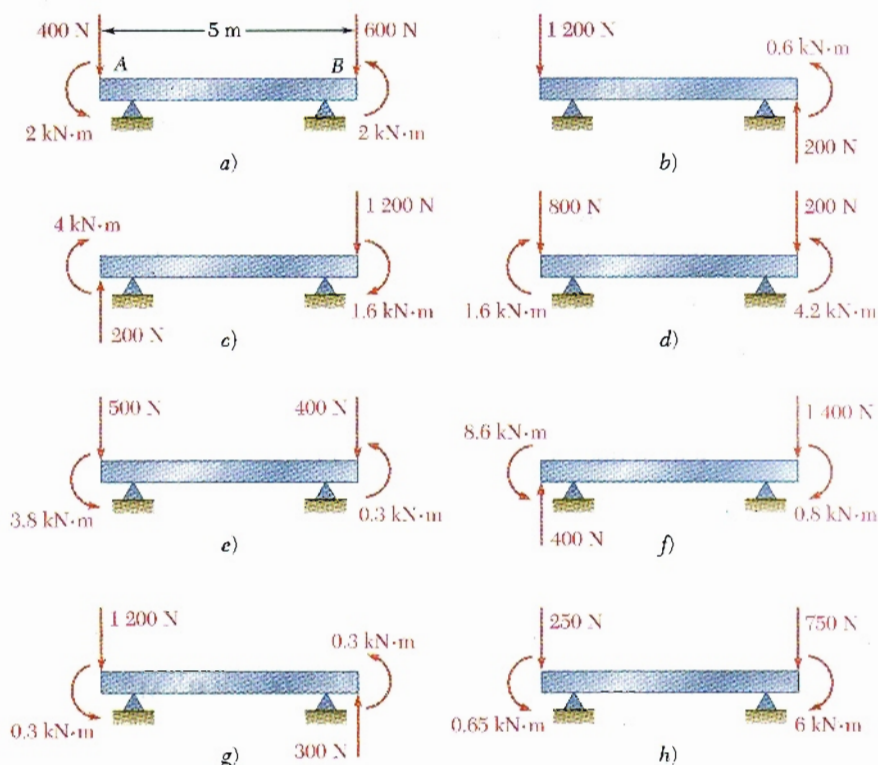


Figura P3.98

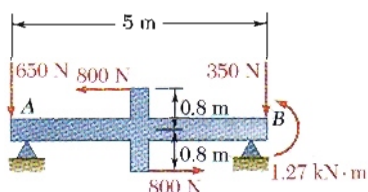


Figura P3.99

3.99 Una viga de 5 m de longitud se carga de la forma indicada en la figura. Determine qué carga del problema 3.98 es equivalente a esta carga.

3.100 Para la viga y las cargas que se muestran en la figura, determine la fuerza única equivalente y la distancia desde el extremo A hasta su línea de acción. Considere *a)* $F_B = 200 \text{ N} \downarrow$, $M_B = 100 \text{ N} \cdot \text{m}$, *b)* $F_B = 100 \text{ N} \uparrow$, $M_B = -600 \text{ N} \cdot \text{m}$, *c)* $F_B = 100 \text{ N} \downarrow$, $M_B = -200 \text{ N} \cdot \text{m}$.

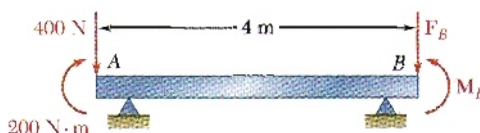


Figura P3.100

3.101 Cinco sistemas fuerza-par diferentes actúan en las esquinas del bloque de metal moldeado de la forma que muestra la figura. Determine cuál de estos sistemas es equivalente a la fuerza $\mathbf{F} = (2 \text{ lb})\mathbf{j}$ y al par de momento $\mathbf{M} = (48 \text{ lb} \cdot \text{in.})\mathbf{i} + (32 \text{ lb} \cdot \text{in.})\mathbf{k}$ ubicado en el punto A.

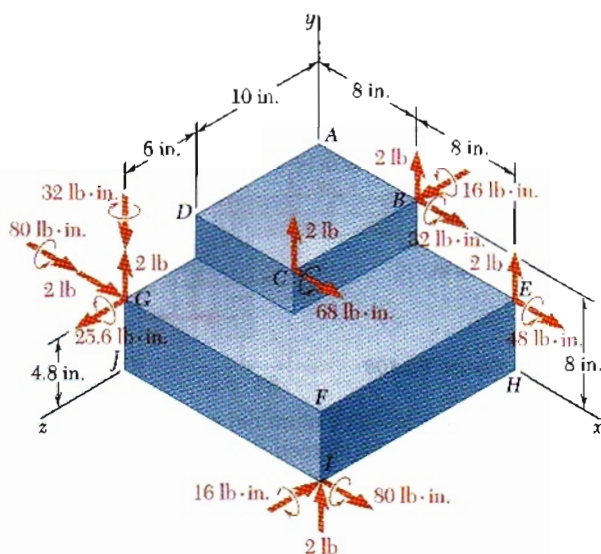


Figura P3.101

3.102 Las masas de dos niños sentados en los extremos A y B de un balancín son de 38 y 29 kg, respectivamente. Determine dónde debe sentarse un tercer niño si la resultante de las fuerzas de los pesos de los tres niños debe pasar por C, y si la masa de la niña es de a) 27 kg, b) 24 kg.

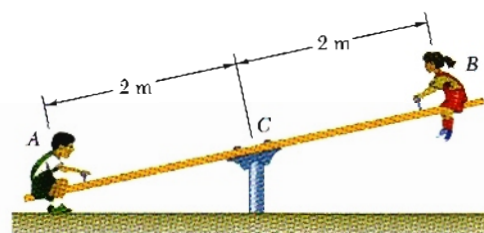


Figura P3.102

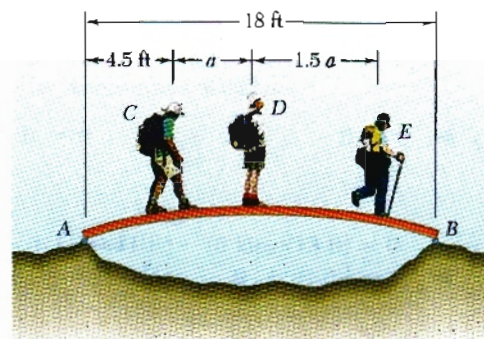


Figura P3.103

3.103 La figura muestra a tres excursionistas cruzando un puente. Si sus pesos en los puntos C, D y E son de 200, 175 y 135 lb, respectivamente, determine a) la distancia horizontal desde A hasta la línea de acción de la resultante de los tres pesos si $a = 3.3 \text{ ft}$, b) el valor de a cuando las cargas sobre los soportes del puente en A y B son iguales.

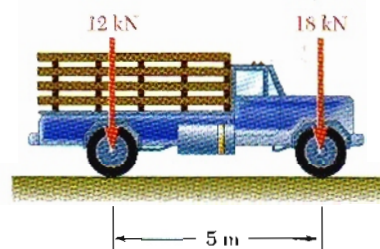


Figura P3.104

3.104 Al conducir un camión sobre una báscula, se determinó que las cargas sobre los ejes delantero y trasero eran de 18 y 12 kN, respectivamente, cuando el camión se encontraba vacío. Determine el peso y la ubicación de la carga más pesada que puede transportar el camión si la carga sobre cada eje no debe sobrepasar de 40 kN.

3.105 El arreglo ABCD se utiliza para aplicar fuerzas a modelos fotoelásticos de componentes mecánicos. Para el modelo y las fuerzas que se muestran en la figura, considere que $\alpha = 50^\circ$ y determine a) la resultante de las fuerzas aplicadas, b) el punto donde la línea de acción de la resultante interseca una línea que pasa por los puntos F y G.

3.106 El arreglo ABCD se utiliza para aplicar fuerzas a modelos fotoelásticos de componentes mecánicos. Para el modelo y las fuerzas que se muestran en la figura, a) determine el valor de α para que la línea de acción de la resultante de las fuerzas aplicadas pase a través del modelo, 100 mm a la derecha de la fuerza de 40 N; b) encuentre la resultante de las fuerzas aplicadas.

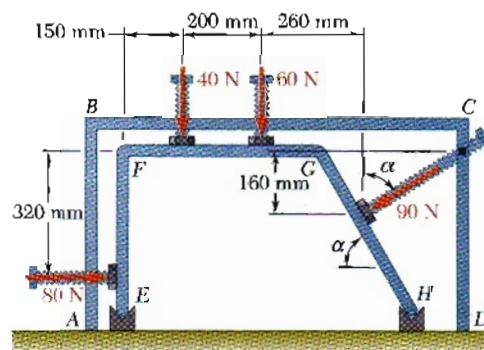


Figura P3.105 y P3.106

138 Cuerpos rígidos: sistemas equivalentes de fuerza

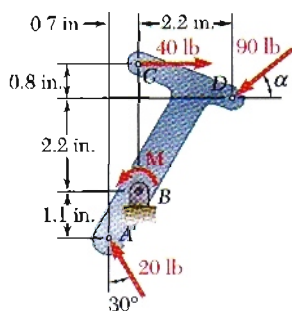


Figura P3.107

3.107 Cuando el par M se aplica al eslabón de un mecanismo, las fuerzas resultantes ejercidas sobre el eslabón por una guía y las conexiones son como se muestran en la figura. Determine *a*) los valores de M y α de manera que las fuerzas y el par aplicados puedan reducirse a una sola fuerza equivalente cuya línea de acción pase por los puntos B y D, *b*) la fuerza equivalente.

3.108 Las tres fuerzas y el par que se muestran en la figura se aplican a una ménsula angular. *a*) Encuentre la resultante de este sistema de fuerzas. *b*) Localice los puntos donde la línea de acción de la resultante interseca las líneas AB y BC.

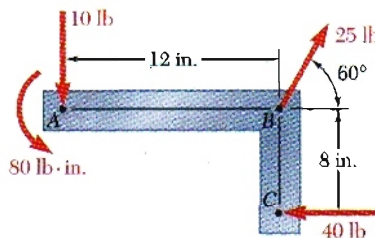


Figura P3.108

3.109 En una pieza delgada de aluminio se perforan simultáneamente cuatro orificios, las perforaciones ejercen sobre la hoja las fuerzas que se muestran en la figura. Si las fuerzas son perpendiculares a las superficies de la pieza, determine *a*) la resultante de las fuerzas aplicadas cuando $\alpha = 45^\circ$ y el punto de intersección de la línea de acción de dicha resultante con la línea que pasa por los puntos A y B; *b*) el valor de α si la línea de acción de la resultante debe pasar por el doblez EF.

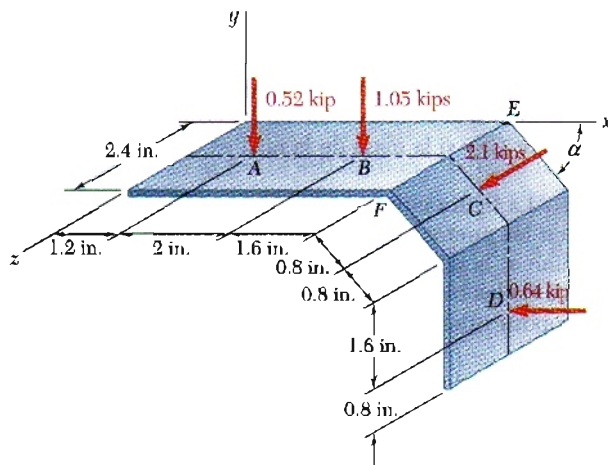


Figura P3.109 y P3.110

3.110 En una pieza delgada de aluminio se perforan simultáneamente cuatro orificios, las perforaciones ejercen sobre la hoja las fuerzas que se muestran en la figura. Si las fuerzas son perpendiculares a las superficies de la pieza, determine *a*) el valor de α si la resultante de las fuerzas aplicadas es paralela a la fuerza de 2.1 kips, *b*) la correspondiente resultante de las fuerzas aplicadas y el punto de intersección de su línea de acción con la línea que une a los puntos A y B.

3.111 Las poleas A y B se montan sobre el soporte CDEF. La tensión en cada lado de las dos bandas es la que se muestra en la figura. Reemplace las cuatro fuerzas con una sola fuerza equivalente y determine dónde se interseca su línea de acción con el borde inferior del soporte.

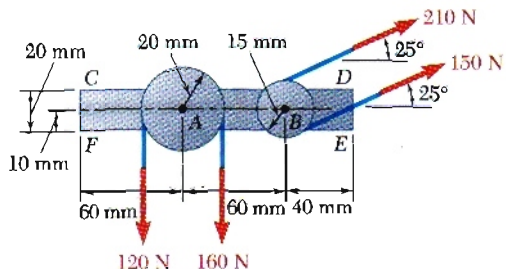


Figura P3.111

3.112 Tres fuerzas y un par actúan sobre la manivela ABC . Para $P = 25$ N y $\alpha = 40^\circ$, a) determine la resultante del sistema de fuerzas dado, b) localice el punto de intersección de la línea de acción de la resultante y la línea que une a los puntos B y C , c) localice el punto de intersección de la línea de acción de la resultante y la línea que pasa por los puntos A y B .

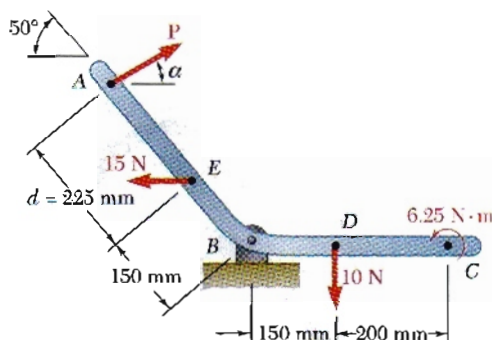


Figura P3.112 y P3.113

3.113 Tres fuerzas y un par actúan sobre la manivela ABC . Determine el valor de d si el sistema de fuerzas dado debe ser equivalente a cero en a) el punto B , b) el punto D .

3.114 Cuando el seguidor AB rueda a lo largo de la superficie del elemento C , ejerce una fuerza F constante y perpendicular a la superficie. a) Reemplace F con un sistema equivalente fuerza-par en el punto D . b) Para $b = 1$ ft y $h = 2$ ft, determine el valor de x para el cual el momento del sistema equivalente fuerza-par en D es máximo.

3.115 Un componente de máquina se somete a las fuerzas mostradas en la figura, cada una de las cuales es paralela a uno de los ejes coordenados. Reemplace estas fuerzas con un sistema equivalente fuerza-par en A .

3.116 Mientras se lija un bloque de madera, éste ejerce sobre el disco del esmeril una fuerza F con magnitud de 1.8 lb. Si las fuerzas de la banda ejercidas sobre la polea de 5 in. de diámetro pertenecen a un plano paralelo a yz , reemplace F y las fuerzas de las bandas con un sistema equivalente fuerza-par en O .

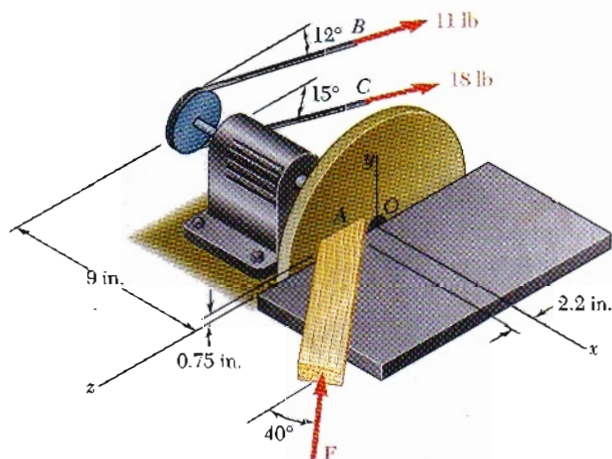


Figura P3.116

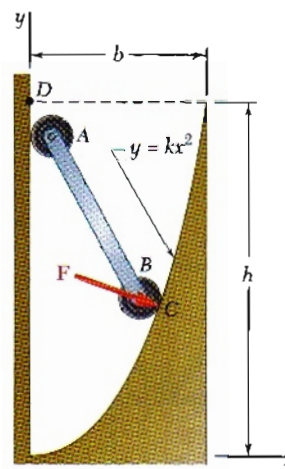


Figura P3.114

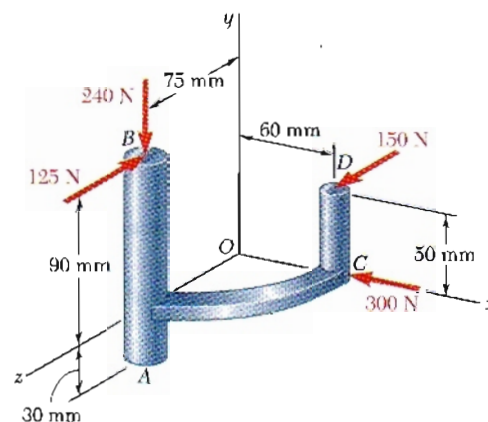


Figura P3.115

3.117 El propietario de un automóvil usa la llave ABC para aflojar el perno ubicado en C. La longitud del mango AB es de 372 mm, y el automovilista aplica las fuerzas A y B sobre la llave. Si estas fuerzas son equivalentes a un sistema fuerza-par en O que consta de la fuerza $\mathbf{R} = -(10 \text{ N})\mathbf{i} + (6 \text{ N})\mathbf{k}$ y el par $\mathbf{M}_O = (60 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{i} + (0.05 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{j} - (10 \text{ N} \cdot \text{m})\mathbf{k}$, determine las fuerzas aplicadas en A y B cuando $A_x = 2 \text{ N}$.

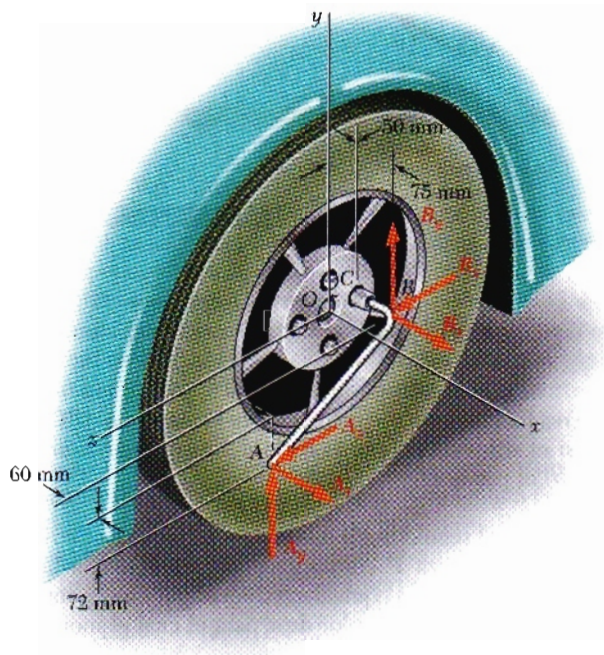


Figura P3.117

3.118 Al usar un sacapuntas manual, un estudiante ejerce sobre el mecanismo las fuerzas y el par que se muestran en la figura. a) Determine las fuerzas ejercidas en B y en C si las fuerzas y el par son equivalentes a un sistema fuerza-par en A que consta de la fuerza $\mathbf{R} = (3.9 \text{ lb})\mathbf{i} + R_y\mathbf{j} - (1.1 \text{ lb})\mathbf{k}$ y el par $\mathbf{M}_A^R = M_x\mathbf{i} + (1.5 \text{ lb} \cdot \text{ft})\mathbf{j} - (1.1 \text{ lb} \cdot \text{ft})\mathbf{k}$. b) Encuentre los valores correspondientes de R_y y M_x .

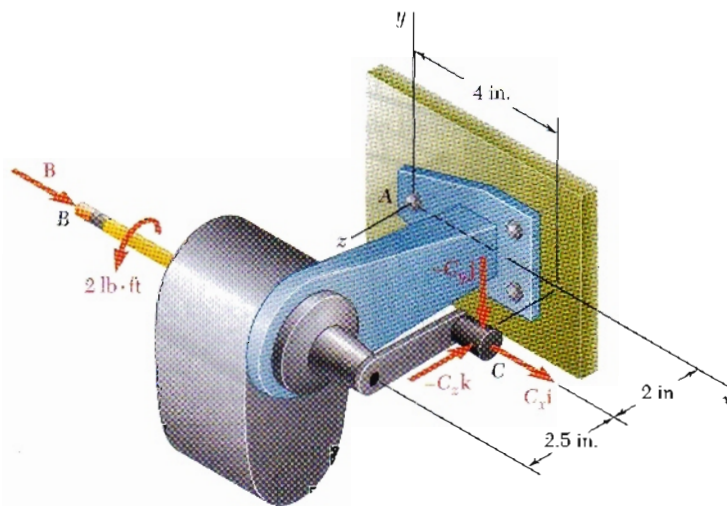


Figura P3.118

3.119 Un tramo de chimenea de un horno está unido al techo en el punto A. Mientras mantiene el extremo libre de la chimenea en F, un trabajador empuja en E y jala en F para alinear el extremo E con el horno. Si la fuerza de 50 N aplicada en F yace en un plano paralelo al plano yz , determine *a*) el ángulo α que forma la fuerza en F con la horizontal si el ducto AB no debe tender a rotar respecto a la vertical; determine *b*) el sistema fuerza-par en B equivalente al sistema de fuerzas dado cuando se satisface esta condición.

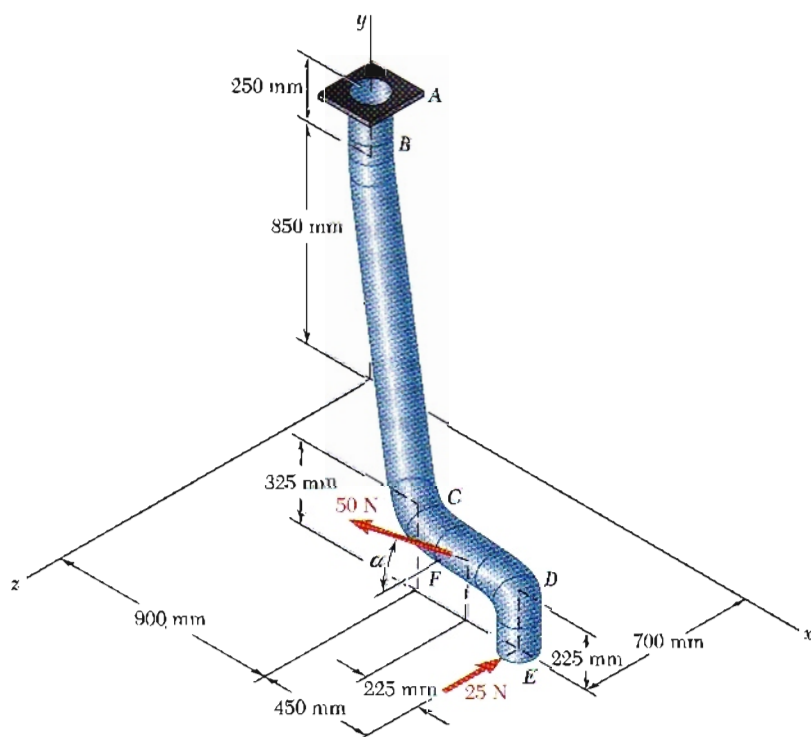


Figura P3.119 y P3.120

3.120 Un tramo de una chimenea para horno está unido al techo en el punto A. Mientras mantiene el extremo libre de la chimenea en F, un trabajador empuja en E y jala en F para alinear el extremo E con el horno. Si la fuerza de 50 N aplicada en F yace en un plano paralelo al plano yz , y $\alpha = 60^\circ$, *a*) reemplace el sistema de fuerzas dado con un sistema equivalente fuerza-par en C, *b*) determine si el ducto CD tenderá a rotar a favor o en contra del sentido de las manecillas del reloj con relación al codo C, visto desde D.

3.121 Un puntal ajustable BC es utilizado para colocar una pared en posición vertical, se ejerce un sistema fuerza-par sobre la pared. Reemplace este sistema fuerza-par con un sistema fuerza-par equivalente en A, de manera que $R = 21.2 \text{ lb}$ y $M = 13.25 \text{ lb} \cdot \text{ft}$.

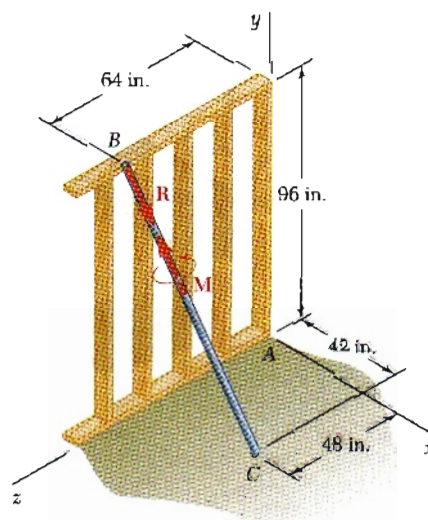


Figura P3.121

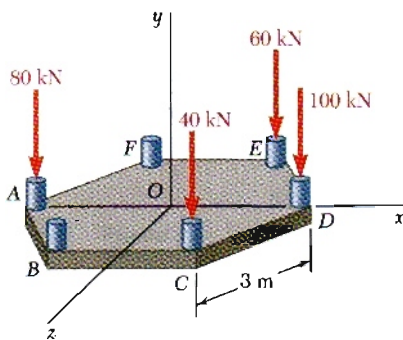


Figura P3.123 y P3.124

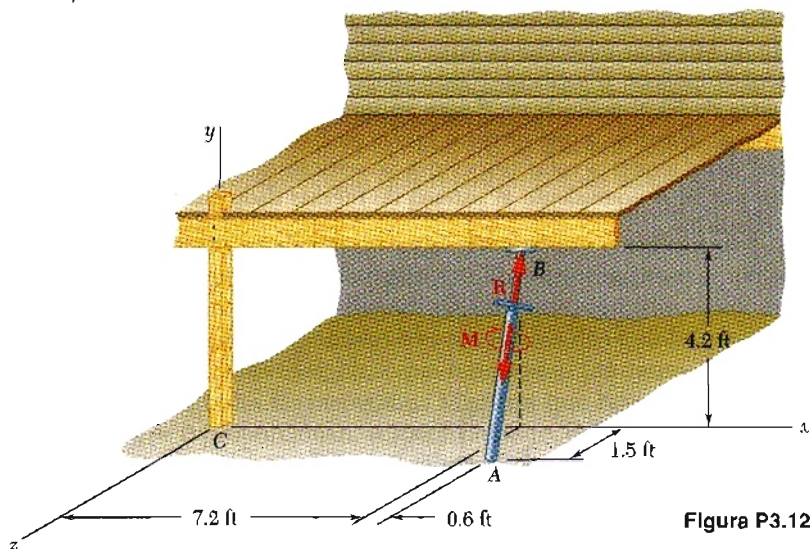


Figura P3.122

3.122 Mientras se repara y nivela, el frente de un pódium caído se sostiene mediante un gato de tornillo. Conforme el gato se expande ejerce sobre el pódium el sistema fuerza-par mostrado, donde $R = 60 \text{ lb}$ y $M = 22.5 \text{ lb} \cdot \text{ft}$. Reemplace este sistema fuerza-par con un sistema equivalente fuerza-par en C.

3.123 Una base de concreto que tiene la forma de un hexágono regular con lados de 3 m soporta cuatro cargas sobre sus columnas, como indica la figura. Determine la magnitud y el punto de aplicación de la resultante de las cuatro cargas.

3.124 Una base de concreto que tiene la forma de un hexágono regular con lados de 3 m soporta cuatro cargas sobre sus columnas, como se muestra en la figura. Determine la magnitud de las cargas adicionales que deben aplicarse en B y F si la resultante de las seis cargas debe pasar por el centro de la base.

3.125 Las fuerzas mostradas en la figura son la resultante de las cargas verticales hacia abajo ejercidas sobre las secciones del techo plano de una construcción, y se deben a la nieve acumulada. Determine la magnitud y el punto de aplicación de la resultante de estas cuatro cargas.

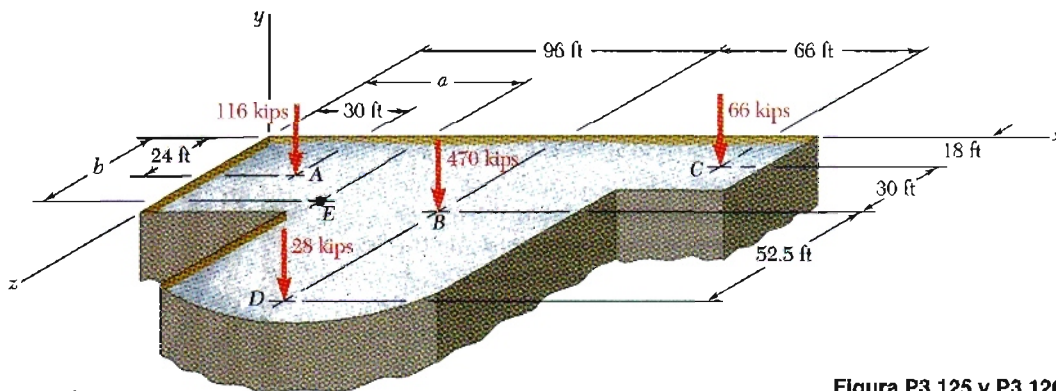


Figura P3.125 y P3.126

3.126 Las fuerzas mostradas en la figura son la resultante de las cargas verticales hacia abajo ejercidas sobre las secciones del techo plano de una construcción, y se deben a la nieve acumulada. Si la nieve representada por la fuerza de 116 kips se remueve de manera que actúe en el punto E, determine a y b si el punto de aplicación de la resultante de las cuatro cargas está entonces en B.

***3.127** Un grupo de estudiantes carga la plataforma de un tráiler de 2×4 m con dos cajas de $0.6 \times 0.6 \times 0.6$ m y con una caja de $0.6 \times 0.6 \times 1.2$ m. Las cajas se colocan en la parte posterior del tráiler de manera que queden alineadas con la parte trasera y los costados de éste. Determine la carga mínima que los estudiantes deben colocar en una caja adicional de $0.6 \times 0.6 \times 1.2$ m y el sitio donde deben asegurarla en el tráiler si ninguna parte de las cajas debe rebasar los costados. Además, suponga que cada caja está cargada uniformemente y que la línea de acción de la resultante del peso de las cuatro cajas pasa por el punto de intersección de las líneas centrales y el eje del tráiler. (Sugerencia: Tome en cuenta que las cajas pueden colocarse en los extremos o los costados.)

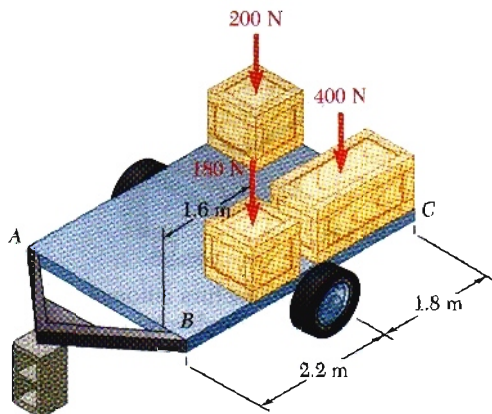


Figura P3.127

***3.128** Resuelva el problema 3.127 si los estudiantes desean colocar todo el peso posible en una cuarta caja y que al menos uno de los lados de ésta coincida con un costado del tráiler.

***3.129** Una pieza de metal laminado sometida a tres fuerzas se dobla en la forma que muestra la figura. Reemplace las tres fuerzas con una llave de torsión equivalente, y determine *a*) la magnitud y la dirección de la resultante \mathbf{R} , *b*) el paso de la llave de torsión y *c*) el punto donde el eje de la llave interseca al plano yz .

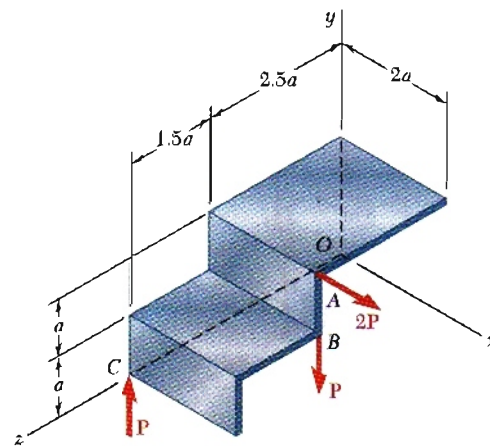


Figura P3.129

***3.130** Un bloque de madera está sometido a tres fuerzas de igual magnitud P en las direcciones que muestra la figura. Reemplace las tres fuerzas con una llave de torsión equivalente, y determine *a*) la magnitud y la dirección de la fuerza resultante \mathbf{R} , *b*) el paso de la llave de torsión y *c*) el punto donde el eje de la llave interseca al plano xy .

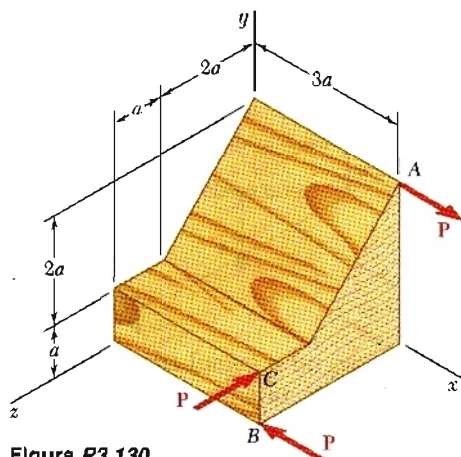


Figura P3.130

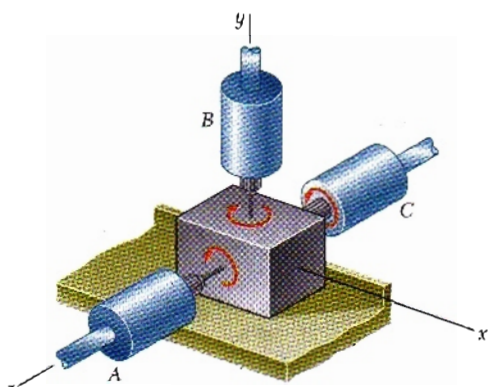


Figura P3.132

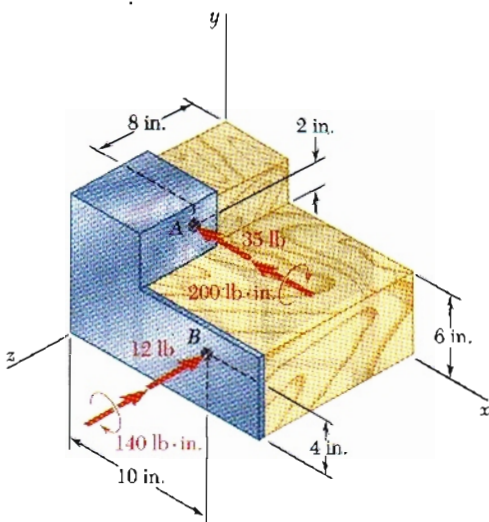


Figura P3.133

***3.131** Las fuerzas y los pares mostrados se aplican sobre dos tornillos para sujetar una placa de metal a un bloque de madera. Reduzca las fuerzas y los pares a una llave de torsión equivalente, y determine *a*) la fuerza resultante **R**, *b*) el paso de la llave de torsión y *c*) el punto donde el eje de la llave interseca al plano *xz*.

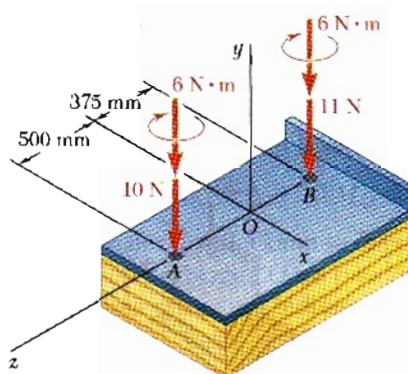


Figura P3.131

***3.132** En un proceso de manufactura automatizado, se perforan tres orificios simultáneamente en un bloque de aluminio, como indica la figura. Cada broca ejerce una fuerza de 50 N y un par de 0.100 N · m sobre el bloque. Si la broca A gira en sentido contrario al de las manecillas del reloj y las brocas B y C lo hacen en el mismo sentido (según se observa para cada broca), reduzca las fuerzas y los pares ejercidos por las brocas sobre el bloque a una llave de torsión equivalente, y determine *a*) la fuerza resultante **R**, *b*) el paso de la llave de torsión, *c*) el punto donde la llave de torsión interseca al plano *xz*.

***3.133** Dos pernos A y B se aprietan aplicando las fuerzas y el par mostrados en la figura. Reemplace las dos llaves de torsión por una sola llave de torsión equivalente, y determine *a*) la resultante **R**, *b*) el paso de la llave de torsión equivalente y *c*) el punto donde el eje de esta llave interseca al plano *yz*.

***3.134** Dos pernos A y B se aprietan aplicando las fuerzas y el par mostrados en la figura. Reemplace las dos llaves de torsión por una sola llave de torsión equivalente, y determine *a*) la resultante **R**, *b*) el paso de la llave de torsión equivalente y *c*) el punto donde el eje de esta llave interseca al plano *xz*.

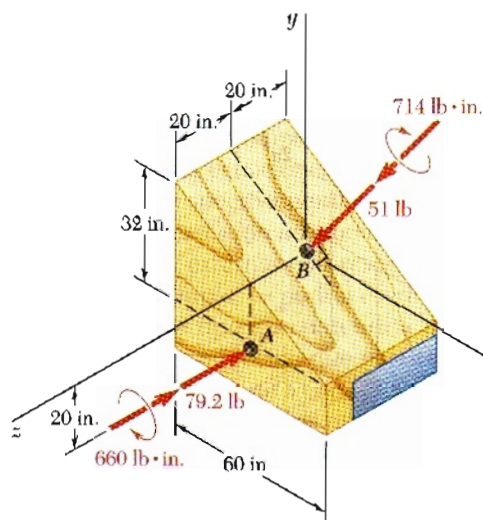


Figura P3.134

***3.135** Un asta bandera se sostiene mediante tres cables. Si la tensión en los cables tiene la misma magnitud P , reemplace las fuerzas ejercidas sobre el asta por una llave de torsión equivalente y determine *a*) la fuerza resultante \mathbf{R} , *b*) el paso de la llave de torsión y *c*) el punto donde el eje de la llave de torsión interseca al plano xz .

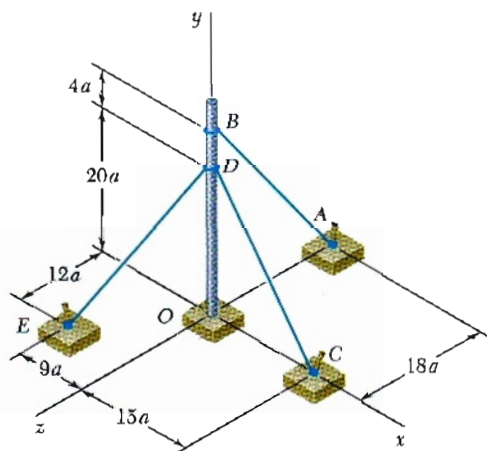


Figura P3.135

***3.136 y *3.137** Determine si el sistema fuerza-par mostrado en la figura puede reducirse a una sola fuerza equivalente \mathbf{R} . Si esto es posible, determine \mathbf{R} y el punto donde la línea de acción de \mathbf{R} interseca al plano yz . Si la reducción no puede lograrse, reemplace el sistema dado por una llave de torsión equivalente y determine su resultante, su paso y el punto donde su eje interseca al plano yz .

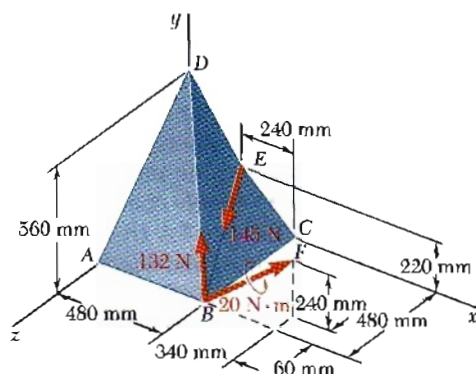


Figura P3.136

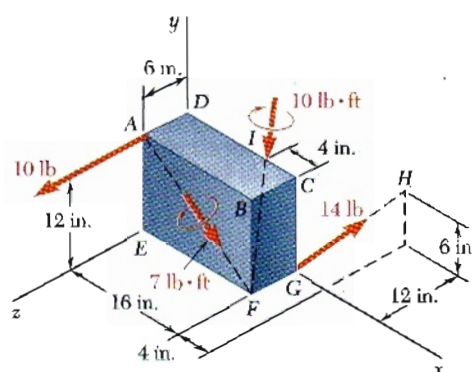


Figura P3.137

***3.138** Reemplace la llave de torsión mostrada en la figura con un sistema equivalente que conste de dos fuerzas perpendiculares al eje z aplicadas, respectivamente, en A y en B .

***3.139** Demuestre que, en general, una llave de torsión puede ser reemplazada por dos fuerzas seleccionadas de tal forma que una pase a través de un punto determinado mientras la otra está contenida en un plano dado.

***3.140** Demuestre que una llave de torsión puede reemplazarse con dos fuerzas perpendiculares, una de las cuales está aplicada en un punto determinado.

***3.141** Demuestre que una llave de torsión puede reemplazarse con dos fuerzas, una de las cuales tiene una línea de acción predefinida.

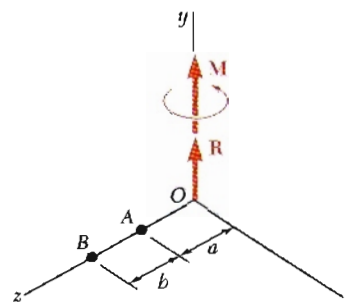


Figura P3.138

REPASO Y RESUMEN DEL CAPÍTULO 3

Principio de transmisibilidad

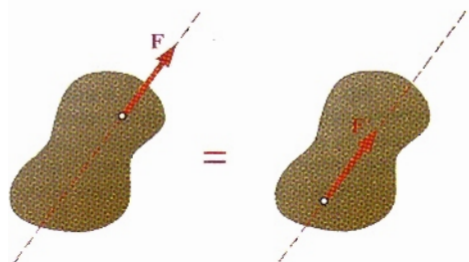


Figura 3.48

Producto vectorial de dos vectores

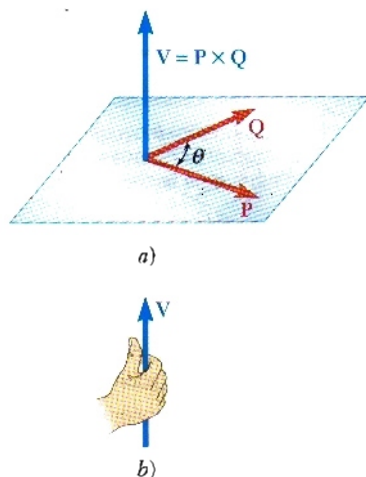


Figura 3.49

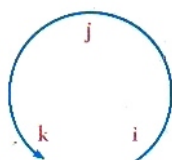


Figura 3.50

En este capítulo se estudió el efecto de fuerzas ejercidas sobre un cuerpo rígido. Primero se aprendió a distinguir entre fuerzas *externas* e *internas* [sección 3.2] y se vio que, de acuerdo con el *principio de transmisibilidad*, el efecto de una fuerza externa sobre un cuerpo rígido permanece inalterado si la fuerza se mueve a lo largo de su línea de acción [sección 3.3]. En otras palabras, dos fuerzas \mathbf{F} y \mathbf{F}' , que actúan sobre un cuerpo rígido en dos puntos distintos tienen el mismo efecto sobre dicho cuerpo si tienen la misma magnitud, la misma dirección y la misma línea de acción (figura 3.48). Se dice que dos fuerzas como éstas son *equivalentes*.

Antes de proceder con el estudio de *sistemas equivalentes de fuerzas*, se presentó el concepto del *producto vectorial de dos vectores* [sección 3.4]. El producto vectorial

$$\mathbf{V} = \mathbf{P} \times \mathbf{Q}$$

de dos vectores \mathbf{P} y \mathbf{Q} se definió como el vector perpendicular al plano que contiene a \mathbf{P} y a \mathbf{Q} (figura 3.49), cuya magnitud es igual a

$$V = PQ \sin \theta \quad (3.1)$$

y que está dirigido de manera que una persona ubicada en la parte terminal de \mathbf{V} verá la rotación a través de un ángulo θ que hace al vector \mathbf{P} colineal con el vector \mathbf{Q} como contraria al movimiento de las manecillas del reloj. Se dice que los tres vectores \mathbf{P} , \mathbf{Q} y \mathbf{V} —considerados en ese orden— forman una *triada de mano derecha*. Se concluye que los productos vectoriales $\mathbf{Q} \times \mathbf{P}$ y $\mathbf{P} \times \mathbf{Q}$ están representados por vectores iguales y opuestos. Así, se tiene que

$$\mathbf{Q} \times \mathbf{P} = -(\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) \quad (3.4)$$

Además, a partir de la definición del producto vectorial de dos vectores, también se concluye que los productos vectoriales de los vectores unitarios \mathbf{i} , \mathbf{j} y \mathbf{k} están dados por

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = 0 \quad \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \quad \mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}$$

y así sucesivamente. El signo del producto vectorial de dos vectores unitarios puede obtenerse ordenando las tres letras que representan los vectores unitarios en un círculo, en un sentido contrario al movimiento de las manecillas del reloj (figura 3.50): el producto vectorial de dos vectores unitarios será positivo si éstos se siguen uno al otro en un orden contrario a las manecillas del reloj y será negativo si éstos se siguen uno al otro en el sentido de las manecillas del reloj.

Las componentes rectangulares del producto vectorial \mathbf{V} de dos vectores \mathbf{P} y \mathbf{Q} fueron expresadas como sigue [sección 3.5]:

$$\begin{aligned} V_x &= P_y Q_z - P_z Q_y \\ V_y &= P_z Q_x - P_x Q_z \\ V_z &= P_x Q_y - P_y Q_x \end{aligned} \quad (3.9)$$

Con el uso de un determinante también se escribió

$$\mathbf{V} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix} \quad (3.10)$$

El momento de una fuerza \mathbf{F} con respecto a un punto O se definió [sección 3.6] como el producto vectorial

$$\mathbf{M}_O = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \quad (3.11)$$

donde \mathbf{r} es el vector de posición trazado desde O hasta el punto de aplicación A de la fuerza \mathbf{F} (figura 3.51). Si se representa con θ el ángulo entre las líneas de acción de \mathbf{r} y \mathbf{F} , se encontró que la magnitud del momento de \mathbf{F} con respecto a O podía expresarse como

$$M_O = rF \sin \theta = Fd \quad (3.12)$$

donde d representa la distancia perpendicular desde O hasta la línea de acción de \mathbf{F} .

Las componentes rectangulares del momento \mathbf{M}_O de una fuerza \mathbf{F} se expresaron [sección 3.8] como

$$\begin{aligned} M_x &= yF_z - zF_y \\ M_y &= zF_x - xF_z \\ M_z &= xF_y - yF_x \end{aligned} \quad (3.18)$$

donde x , y y z son las componentes del vector de posición \mathbf{r} (figura 3.52). Usando una forma de determinante, se escribió también

$$\mathbf{M}_O = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \quad (3.19)$$

En el caso más general del momento de una fuerza \mathbf{F} aplicada en A con respecto a un punto arbitrario B , se obtuvo que

$$\mathbf{M}_B = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_{A/B} & y_{A/B} & z_{A/B} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \quad (3.21)$$

donde $x_{A/B}$, $y_{A/B}$ y $z_{A/B}$ son las componentes del vector $\mathbf{r}_{A/B}$:

$$x_{A/B} = x_A - x_B \quad y_{A/B} = y_A - y_B \quad z_{A/B} = z_A - z_B$$

Componentes rectangulares del producto vectorial

Momento de una fuerza con respecto a un punto

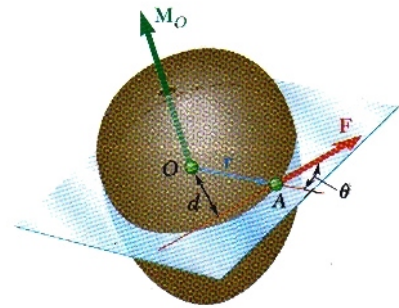


Figura 3.51

Componentes rectangulares del momento

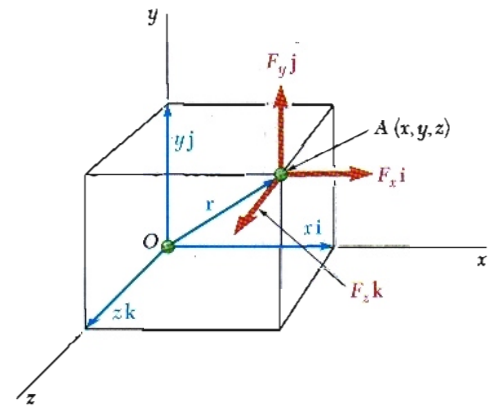


Figura 3.52

En el caso de *problemas que involucren únicamente a dos dimensiones*, se puede suponer que la fuerza \mathbf{F} se encuentra en el plano xy . Su momento \mathbf{M}_B con respecto a un punto B que se encuentra en ese mismo plano es perpendicular al plano en cuestión (figura 3.53) y está completamente definido por el escalar

$$M_B = (x_A - x_B)F_y - (y_A - y_B)F_x \quad (3.23)$$

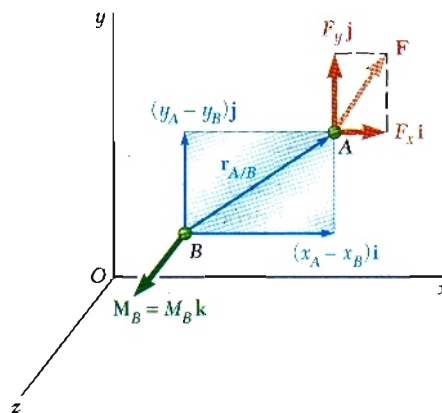


Figura 3.53

Producto escalar de dos vectores

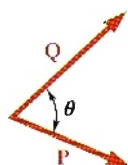


Figura 3.54

Proyección de un vector sobre un eje

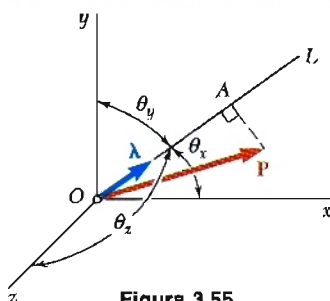


Figura 3.55

Producto triple escalar de tres vectores

En los problemas resueltos 3.1 al 3.4 se mostraron varios métodos para el cálculo del momento de una fuerza con respecto a un punto.

El *producto escalar* de dos vectores \mathbf{P} y \mathbf{Q} [sección 3.9] se denotó por $\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q}$ y se definió como la cantidad escalar

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = PQ \cos \theta \quad (3.24)$$

donde θ es el ángulo entre \mathbf{P} y \mathbf{Q} (figura 3.54). Se expresó el producto escalar de \mathbf{P} y \mathbf{Q} en términos de las componentes escalares de los dos vectores, se determinó que

$$\mathbf{P} \cdot \mathbf{Q} = P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z \quad (3.30)$$

La *proyección de un vector P sobre un eje OL* (figura 3.55) se puede obtener formando el producto escalar de \mathbf{P} y el vector unitario λ a lo largo de OL. Así, se tiene que

$$P_{OL} = \mathbf{P} \cdot \lambda \quad (3.36)$$

o, con las componentes rectangulares,

$$P_{OL} = P_x \cos \theta_x + P_y \cos \theta_y + P_z \cos \theta_z \quad (3.37)$$

donde θ_x , θ_y y θ_z representan los ángulos que forma el eje OL con los ejes coordenados.

El *producto triple escalar* de los tres vectores \mathbf{S} , \mathbf{P} y \mathbf{Q} se definió como la expresión escalar

$$\mathbf{S} \cdot (\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) \quad (3.38)$$

que se obtuvo formando el producto escalar de \mathbf{S} con el producto vectorial de \mathbf{P} y \mathbf{Q} [sección 3.10]. Se mostró que

$$\mathbf{S} \cdot (\mathbf{P} \times \mathbf{Q}) = \begin{vmatrix} S_x & S_y & S_z \\ P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \end{vmatrix} \quad (3.41)$$

donde los elementos del determinante son las componentes rectangulares de los tres vectores.

El momento de una fuerza \mathbf{F} con respecto a un eje OL [sección 3.11] se definió como la proyección OC sobre OL del momento \mathbf{M}_O de la fuerza \mathbf{F} (figura 3.56), esto es, se definió como el producto triple escalar del vector unitario λ , el vector de posición \mathbf{r} y la fuerza \mathbf{F} :

$$M_{OL} = \lambda \cdot \mathbf{M}_O = \lambda \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) \quad (3.42)$$

Con el uso de la forma de determinante para el producto triple escalar, se tiene

$$M_{OL} = \begin{vmatrix} \lambda_x & \lambda_y & \lambda_z \\ x & y & z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \quad (3.43)$$

donde $\lambda_x, \lambda_y, \lambda_z =$ cosenos directores del eje OL

$x, y, z =$ componentes de \mathbf{r}

$F_x, F_y, F_z =$ componentes de \mathbf{F}

En el problema resuelto 3.5 se presentó un ejemplo de la determinación del momento de una fuerza con respecto a un eje inclinado.

Se dice que *dos fuerzas \mathbf{F} y $-\mathbf{F}$ que tienen la misma magnitud, líneas de acción paralelas y sentidos opuestos forman un par* [sección 3.12]. Se demostró que el momento de un par es independiente del punto con respecto al cual se calcula dicho momento; el momento de un par es un vector \mathbf{M} perpendicular al plano del par e igual en magnitud al producto de la magnitud común de las fuerzas F y la distancia perpendicular d entre sus líneas de acción (figura 3.57).

Dos pares que tienen el mismo momento \mathbf{M} son *equivalentes*, esto es, dichos pares tienen el mismo efecto sobre un cuerpo rígido dado [sección 3.13]. La suma de dos pares también es un par [sección 3.14] y el momento \mathbf{M} del par resultante se puede obtener sumando vectorialmente los momentos \mathbf{M}_1 y \mathbf{M}_2 de los pares originales [problema resuelto 3.6]. Por tanto, se concluye que un par puede ser representado por un vector, conocido como el *vector de par*, igual en magnitud y dirección al momento \mathbf{M} del par [sección 3.15]. Un vector de par es un *vector libre* que, si así se desea, se puede fijar al origen O y se puede separar en componentes (figura 3.58).

Momento de una fuerza con respecto a su eje

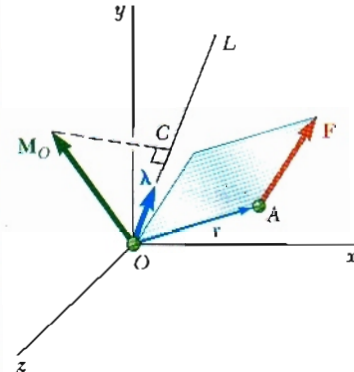


Figura 3.56

Pares

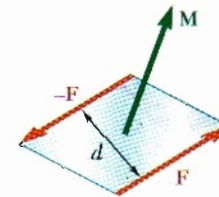


Figura 3.57

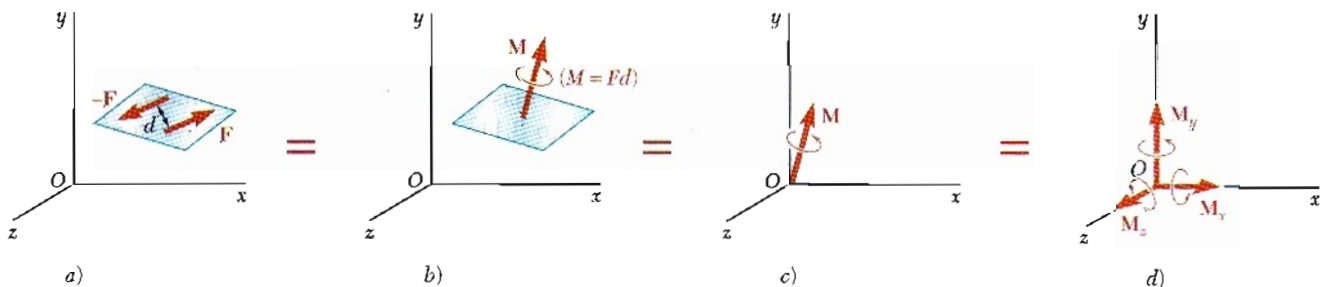


Figura 3.58

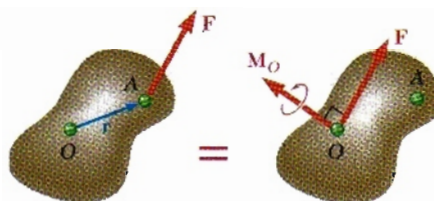


Figura 3.59

Sistema fuerza-par

Reducción de un sistema de fuerzas a un sistema de fuerza-par

Cualquier fuerza \mathbf{F} que actúa en un punto A de un cuerpo rígido puede reemplazarse por un *sistema fuerza-par* en un punto arbitrario O el cual consta de la fuerza \mathbf{F} aplicada en O y un par de momento \mathbf{M}_O , igual al momento de la fuerza \mathbf{F} en su posición original con respecto a O [sección 3.16]; se debe señalar que la fuerza \mathbf{F} y el vector de par \mathbf{M}_O siempre son perpendiculares entre sí (figura 3.59).

Se concluye que [sección 3.17] *cualquier sistema de fuerzas puede ser reducido a un sistema fuerza-par en un punto dado O* , reemplazando primero cada una de las fuerzas del sistema por un sistema equivalente fuerza-par en O (figura 3.60) para después sumar todas las fuerzas y todos los pares determinados de esta forma con el fin de obtener a la fuerza resultante \mathbf{R} y al vector de par resultante \mathbf{M}_O^R [problemas resueltos 3.8 al 3.11]. Obsérvese que, en general, la resultante \mathbf{R} y el vector de par \mathbf{M}_O^R no serán perpendiculares entre sí.

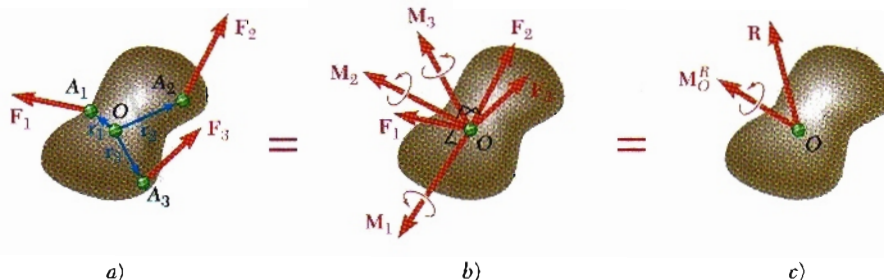


Figura 3.60

Sistemas equivalentes de fuerzas

Reducción adicional de un sistema de fuerzas

Con base en lo anterior, se concluyó [sección 3.18] que, en lo que respecta a los cuerpos rígidos, *dos sistemas de fuerzas $\mathbf{F}_1, \mathbf{F}_2, \mathbf{F}_3, \dots$ y $\mathbf{F}'_1, \mathbf{F}'_2, \mathbf{F}'_3, \dots$, son equivalentes si, y sólo si,*

$$\Sigma \mathbf{F} = \Sigma \mathbf{F}' \quad \text{y} \quad \Sigma \mathbf{M}_O = \Sigma \mathbf{M}'_O \quad (3.57)$$

Si la fuerza resultante \mathbf{R} y el vector de par resultante \mathbf{M}_O^R son perpendiculares entre sí, el sistema fuerza-par en O puede reducirse aún más a una sola fuerza resultante [sección 3.20]. Éste es el caso para sistemas que están constituidos por: *a)* fuerzas concurrentes (como los sistemas considerados en el capítulo 2), *b)* fuerzas coplanares [problemas resueltos 3.8 y 3.9] o *c)* fuerzas paralelas [problema resuelto 3.11]. Si la resultante \mathbf{R} y el vector de par \mathbf{M}_O^R no son perpendiculares entre sí, el sistema *no puede* ser reducido a una sola fuerza. Éste, sin embargo, puede ser reducido a un tipo especial de sistema fuerza-par que recibe el nombre de *llave de torsión*, el cual consta de la resultante \mathbf{R} y un vector de par \mathbf{M}_1 dirigido a lo largo de \mathbf{R} [sección 3.21 y problema resuelto 3.12].

Problemas de repaso

3.142 Se requiere una fuerza vertical de 800 N para remover, de la tabla mostrada, el clavo que está en C . Un instante antes de que el clavo comience a salir, determine *a*) el momento respecto a B de la fuerza ejercida sobre el clavo, *b*) la magnitud de la fuerza P que genera el mismo momento respecto a B si $\alpha = 10^\circ$ y *c*) la fuerza P mínima que genera el mismo momento respecto a B .

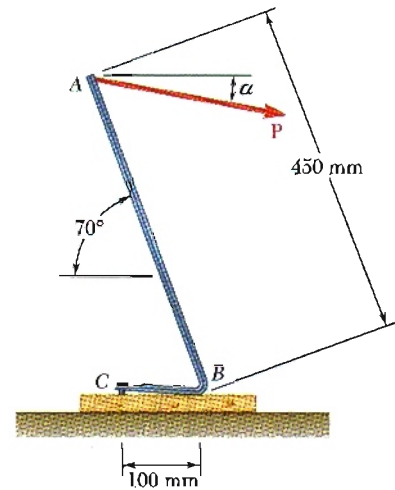


Figura P3.142

3.143 Un mecánico automotriz usa el tramo de tubo AB como palanca para tensar la banda de la p Polea de un alternador. Cuando el mecánico presiona hacia abajo en el punto A , se genera una fuerza de 380 N sobre el alternador en B . Determine el momento de la fuerza respecto al perno C si su línea de acción pasa por O .

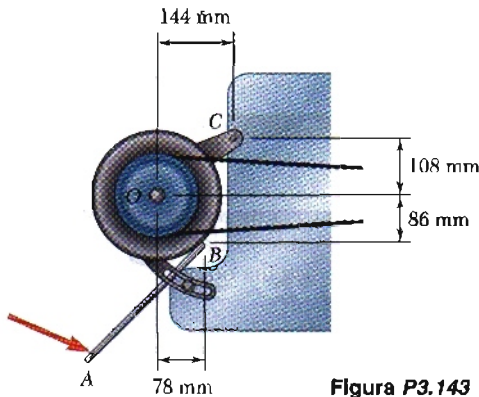


Figura P3.143

3.144 La rampa $ABCD$ se sostiene mediante cables colocados en las esquinas C y D . Si la tensión que se ejerce en cada uno de los cables es de 360 lb, determine el momento respecto a A de la fuerza ejercida por *a*) el cable en D , *b*) el cable en C .

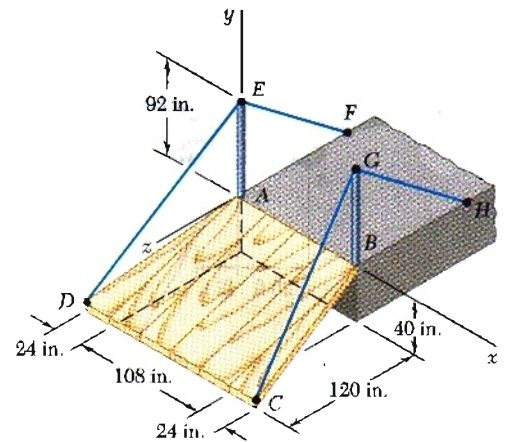


Figura P3.144

3.145 Determine los ángulos formados por los alambres AC y AD de la red de voleibol que se muestra en la figura.

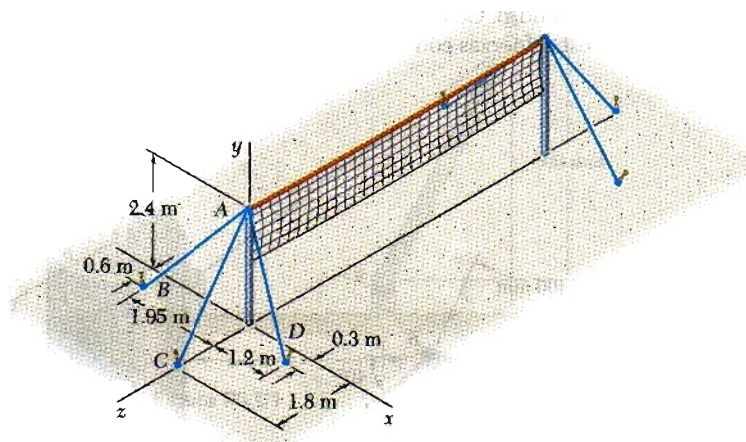


Figura P3.145

3.146 Para levantar una caja pesada, un hombre usa un bloque y un polipasto sujetándolos a la parte inferior de la viga I mediante el gancho colocado en B . Si los momentos, respecto a los ejes y y z , de la fuerza ejercida en B por el tramo AB de la cuerda son, respectivamente, de 100 lb · ft y de -400 lb · ft, determine la distancia a .

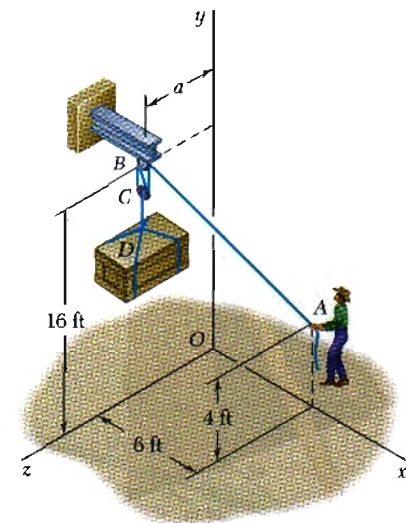


Figura P3.146

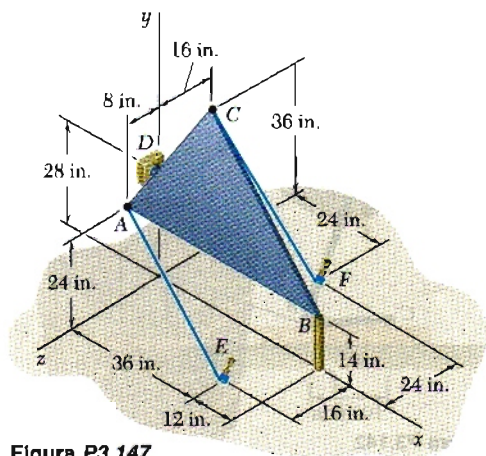


Figura P3.147

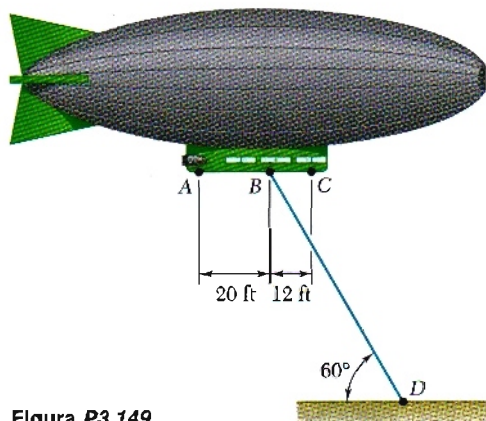


Figura P3.149

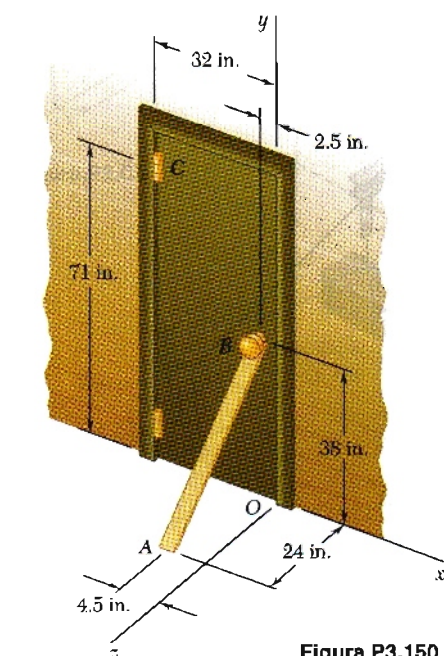


Figura P3.150

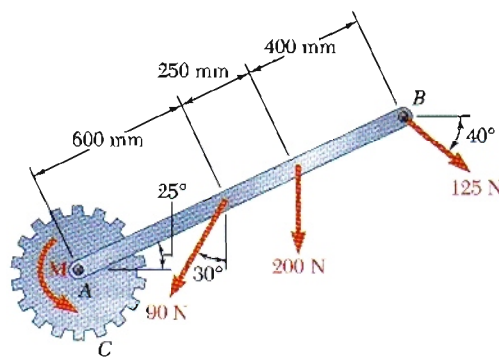


Figura P3.151

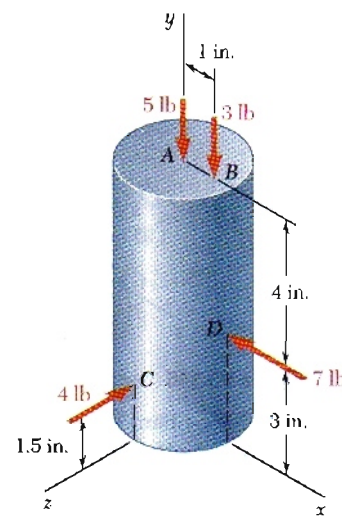


Figura P3.152

3.147 La placa triangular ABC está sostenida por apoyos de cuenca y bola (rótula) colocados en B y D , y se mantiene en la posición mostrada mediante los cables AE y CF . Si la fuerza ejercida por el cable CF en C es de 132 lb, determine el momento de esa fuerza respecto a la línea que une los puntos D y B .

3.148 La tensión presente en el cable que está unido al extremo C de un aguilón ajustable ABC es de 1 000 N. Reemplace la fuerza ejercida por el cable en C con un sistema equivalente fuerza-par en $a)$ el punto A , $b)$ el punto B .

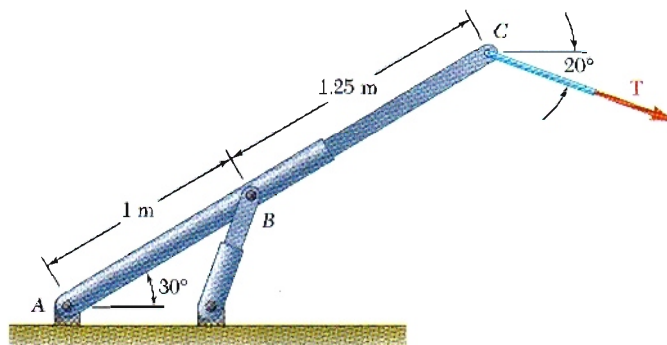


Figura P3.148

3.149 Un dirigible se amarra mediante un cable sujeto a la cabina en el punto B . Si la tensión en el cable es de 250 lb, reemplace la fuerza ejercida por el cable en B con un sistema equivalente formado por dos fuerzas paralelas aplicadas en A y C .

3.150 Para mantener cerrada una puerta, se usa una tabla de madera colocada entre el piso y la perilla de la puerta. La fuerza que la tabla ejerce en B es de 45 lb y está dirigida a lo largo de la línea AB . Reemplace esta fuerza con un sistema equivalente fuerza-par en C .

3.151 El engrane C está unido rígidamente al brazo AB . Si las fuerzas y los pares mostrados se pueden reducir a una sola fuerza equivalente en A , determine dicha fuerza y la magnitud del par M .

3.152 Un buje de plástico se inserta en un cilindro de metal de 3 in. de diámetro como indica la figura, la herramienta de inserción ejerce fuerzas sobre la superficie del cilindro. Cada fuerza es paralela a uno de los ejes coordenados. Reemplace estas fuerzas con un sistema equivalente fuerza-par en C .

3.153 Tres niños se encuentran parados en una balsa de 15×15 ft. Los pesos de los niños situados, respectivamente, en A , B y C son de 85, 60 y 90 lb. Si una cuarta niña con peso de 95 lb se sube a la balsa, determine dónde debe estar parada si los otros niños permanecen en la posición que se muestra y si la línea de acción de la resultante del peso de los cuatro niños debe pasar por el centro de la balsa.

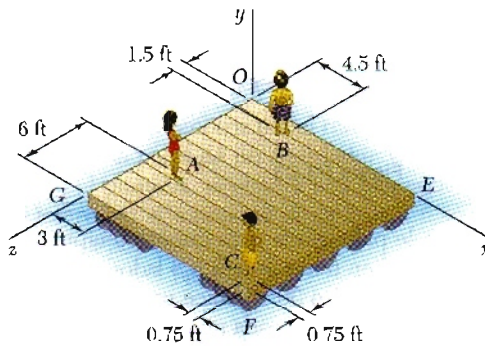


Figura P3.153

Problemas de computadora

3.C1 La barra AB es mantenida en posición mediante el cordón AC cuya tensión es T . Utilice un programa de cómputo para determinar el momento, respecto a B , de la fuerza ejercida por el cordón en el punto A en términos de la tensión T y la distancia c . Grafique el momento respecto a B para $320 \text{ mm} \leq c \leq 960 \text{ mm}$ si a) $T = 50 \text{ N}$, b) $T = 75 \text{ N}$, c) $T = 100 \text{ N}$.

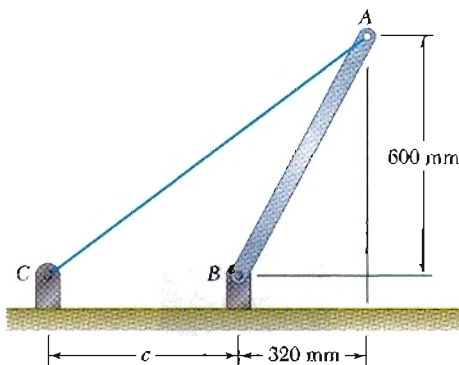


Figura P3.C1

3.C2 Un tubo de 400 mm de longitud se puede deslizar libremente a lo largo de una barra horizontal. Los extremos A y B del tubo están conectados por cordones elásticos fijados al punto C . a) Determine el ángulo θ entre los dos cordones AC y BC como una función de x . b) Grafique el ángulo θ entre los cordones AC y BC como una función de x para $-400 \text{ mm} \leq x \leq 400 \text{ mm}$.

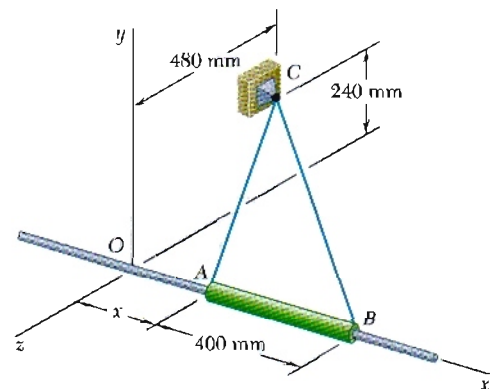


Figura P3.C2

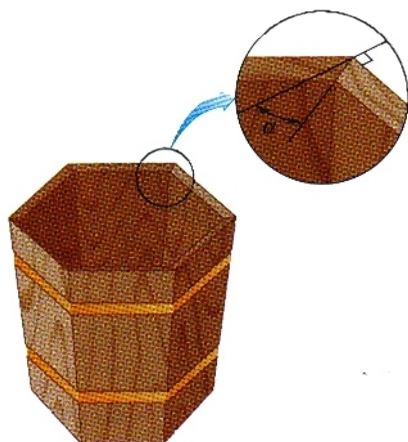


Figura P3.C4

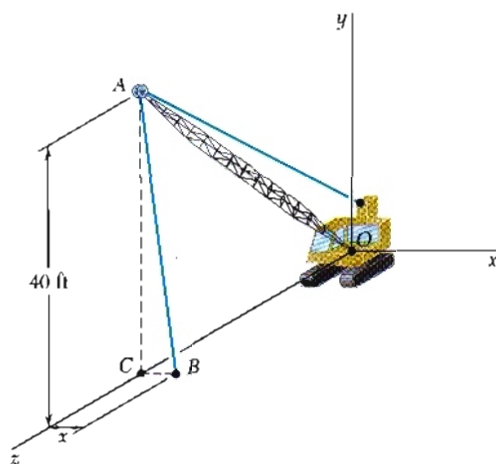


Figura P3.C5

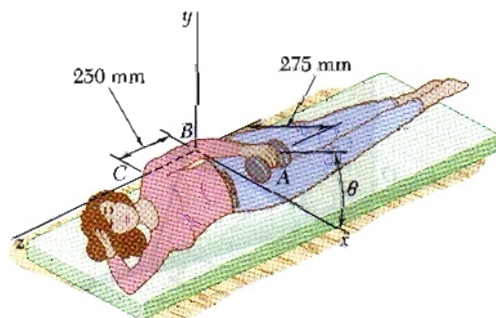


Figura P3.C6

3.C3 Utilice un programa de cómputo para determinar la distancia perpendicular que hay entre la línea de acción de una fuerza F y la línea OL . Ejecute dicho programa para resolver a) el problema 3.62, b) el problema 3.63, c) el problema 3.65.

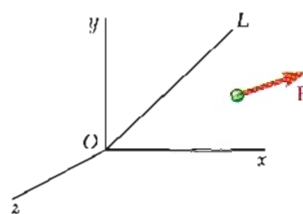


Figura P3.C3

3.C4 Un amigo le pide ayuda para diseñar recipientes donde cultivar flores. Los recipientes deben tener 4, 5, 6 u 8 lados, los cuales pueden estar proyectados hacia fuera 10, 20 o 30°. Utilice un programa de cómputo para determinar el ángulo α del bisel en cada uno de los doce diseños propuestos. (Sugerencia: El ángulo α del bisel es igual a la mitad del ángulo formado por las normales que se dirigen hacia dentro de dos lados adyacentes.)

3.C5 Una grúa está orientada de manera que el extremo del aguilón OA de 50 ft pertenece al plano yz como se muestra en la figura. Si la tensión en el cable AB es de 875 lb, determine el momento respecto a cada eje coordenado de la fuerza ejercida sobre A por el cable AB como una función de x . Grafique cada momento como una función de x para $-15 \text{ ft} \leq x \leq 15 \text{ ft}$.

3.C6 Una paciente que realiza terapia física descansa sobre su lado derecho y sostiene una mancuerna de 1.5 kg en su mano izquierda, la cual levanta lentamente a lo largo de una trayectoria circular. Si el centro de la trayectoria está en B y ésta pertenece al plano xy , grafique las componentes escalares del momento del peso de la mancuerna, respecto a C , como una función de θ para $-70^\circ \leq \theta \leq 40^\circ$.

3.C7 El reductor de velocidad de ángulo recto horizontal que se muestra en la figura pesa 40 lb, y su centro de gravedad está ubicado sobre el eje y . Si $M_1 = An^2$ y $M_2 = An^3$, determine la fuerza única que es equivalente al peso de la unidad y los dos pares que actúan sobre ella, asimismo determine el punto de coordenadas $(x, 0, z)$ donde la línea de acción de la fuerza única interseca al piso. Grafique x y z como funciones de n para $2 \leq n \leq 6$ cuando a) $A = 0.75 \text{ lb} \cdot \text{ft}$, b) $A = 1.5 \text{ lb} \cdot \text{ft}$, c) $A = 2 \text{ lb} \cdot \text{ft}$.

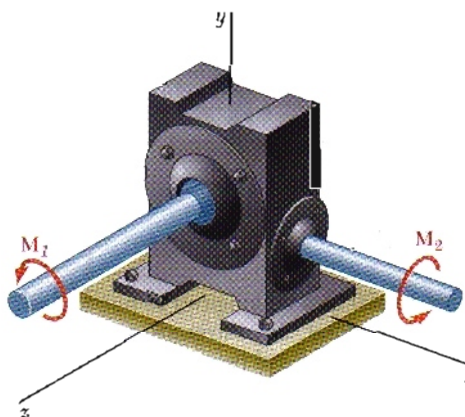


Figura P3.C7

3.C8 Una viga AB está sometida a varias fuerzas verticales, como se muestra en la figura. Con el uso de software determine la magnitud de la resultante de las fuerzas y la distancia x_C al punto C , el punto donde la línea de acción de la resultante interseca a AB . Use este software para resolver el problema 3.103a.

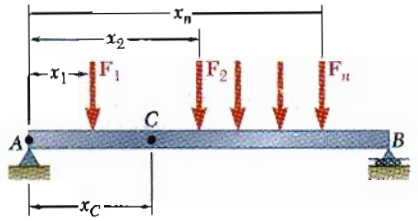


Figura P3.C8

3.C9 Con el uso de software, determine la magnitud y el punto de aplicación de la resultante de las fuerzas verticales P_1, P_2, \dots, P_n , las cuales actúan en los puntos A_1, A_2, \dots, A_n que se encuentran en el plano xz . Use este software para resolver: a) el problema 3.123 y b) el problema 3.125.

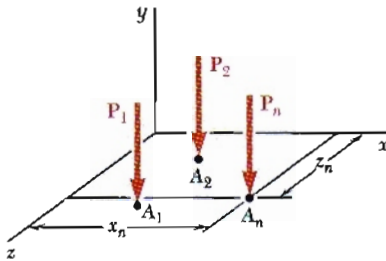


Figura P3.C9

3.C10 Usando software, determine si un sistema de fuerzas y pares puede ser reducido a una sola fuerza equivalente R , y, si es posible, determine R y el punto donde la línea de acción de R interseca al plano yz . Use este software para resolver: a) el problema 3.136 y b) el problema 3.137.

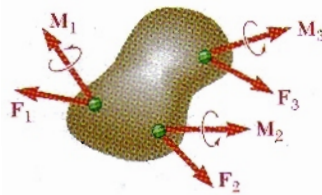


Figura P3.C10

Equilibrio de cuerpos rígidos



Para cada una de las turbinas de viento que se muestran en la fotografía, debe calcularse la suma de los momentos de las cargas estática y dinámica respecto a la base de la torre para asegurar que el par de la reacción en la base no produzca una ruptura en la torre.

EQUILIBRIO DE CUERPOS RÍGIDOS

- 4.1 Introducción
- 4.2 Diagrama de cuerpo libre
 - Equilibrio en dos dimensiones
- 4.3 Reacciones en los puntos de apoyo y conexiones de una estructura bidimensional
- 4.4 Equilibrio de un cuerpo rígido en dos dimensiones
- 4.5 Reacciones estáticamente indeterminadas. Restricciones parciales
- 4.6 Equilibrio de un cuerpo sujeto a dos fuerzas
- 4.7 Equilibrio de un cuerpo sujeto a tres fuerzas
 - Equilibrio en tres dimensiones
- 4.8 Equilibrio de un cuerpo rígido en tres dimensiones
- 4.9 Reacciones en puntos de apoyo y conexiones para una estructura tridimensional

4.1. INTRODUCCIÓN

En el capítulo anterior se vio que las fuerzas externas que actúan sobre un cuerpo rígido pueden reducirse a un sistema fuerza-par en un punto arbitrario O . Cuando la fuerza y el par son iguales a cero, las fuerzas externas forman un sistema equivalente a cero y se dice que el cuerpo rígido se encuentra en *equilibrio*.

Por tanto, las condiciones necesarias y suficientes para el equilibrio de un cuerpo rígido se pueden obtener igualando a cero a \mathbf{R} y a \mathbf{M}_O^R en las relaciones (3.52) de la sección 3.17:

$$\Sigma \mathbf{F} = 0 \quad \Sigma \mathbf{M}_O = \Sigma (\mathbf{r} \times \mathbf{F}) = 0 \quad (4.1)$$

Si se descompone cada fuerza y cada momento en sus componentes rectangulares, se pueden expresar las condiciones necesarias y suficientes para el equilibrio de un cuerpo rígido por medio de las seis ecuaciones escalares que se presentan a continuación:

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma F_y = 0 \quad \Sigma F_z = 0 \quad (4.2)$$

$$\Sigma M_x = 0 \quad \Sigma M_y = 0 \quad \Sigma M_z = 0 \quad (4.3)$$

Las ecuaciones obtenidas se pueden emplear para determinar fuerzas desconocidas que están aplicadas sobre el cuerpo rígido o reacciones desconocidas ejercidas sobre éste por sus puntos de apoyo. Se observa que las ecuaciones (4.2) expresan el hecho de que las componentes de las fuerzas externas en las direcciones x , y y z están balanceadas; las ecuaciones (4.3) expresan a su vez que los momentos de las fuerzas externas con respecto a los ejes x , y y z también están balanceados. Por tanto, para un cuerpo rígido en equilibrio el sistema de fuerzas externas no le impartirá un movimiento traslacional o rotacional al cuerpo en consideración.

Para poder escribir las ecuaciones de equilibrio para un cuerpo rígido, es esencial identificar primero todas las fuerzas que actúan sobre dicho cuerpo y, entonces, dibujar el *diagrama de cuerpo libre* correspondiente. En este capítulo se considerará primero el equilibrio de *estructuras bidimensionales* sujetas a fuerzas contenidas en sus planos y se aprenderá cómo dibujar sus diagramas de cuerpo libre. Además de las fuerzas *aplicadas* sobre una estructura, se considerarán las *reacciones* ejercidas sobre esta última por sus puntos de apoyo. Se asociará un tipo específico de reacción con cada tipo de apoyo. Se aprenderá cómo determinar si una estructura está apoyada apropiadamente, de forma que se pueda saber de antemano si las ecuaciones de equilibrio podrán resolverse para determinar las fuerzas y reacciones desconocidas.

En la última parte del capítulo se considerará el equilibrio de estructuras tridimensionales y se realizará el mismo tipo de análisis para estas estructuras y para sus puntos de apoyo.

Al resolver un problema relacionado con el equilibrio de un cuerpo rígido es esencial que se consideren *todas* las fuerzas que actúan sobre éste; además, es importante excluir cualquier fuerza que no esté dada directamente sobre dicho cuerpo. Omitir o agregar una fuerza extraña podría destruir las condiciones de equilibrio. Por tanto, el primer paso en la solución del problema es esquematizar un *diagrama de cuerpo libre* del cuerpo rígido en consideración. Los diagramas de cuerpo libre ya fueron utilizados en muchas ocasiones en el capítulo 2. Sin embargo, en vista de su importancia para la solución de problemas de equilibrio, aquí se resumen los diferentes pasos que se deben seguir al momento de dibujar un diagrama de cuerpo libre.

1. Se debe tomar una decisión acertada en relación con la selección del cuerpo libre que será utilizado. Después se debe separar al cuerpo del suelo y de todos los demás cuerpos. Así, se realiza un croquis del contorno del cuerpo ya aislado.
2. Todas las fuerzas externas deben indicarse en el diagrama de cuerpo libre. Estas fuerzas representan las acciones ejercidas *sobre* el cuerpo libre *por* el suelo y *por* los cuerpos que han sido separados del mismo; estas fuerzas deben aplicarse en los diversos puntos sobre los que el cuerpo libre estaba apoyado en el suelo o estaba conectado a otros cuerpos. También se debe incluir entre las fuerzas externas el *peso* del cuerpo libre, puesto que representa la atracción ejercida por la Tierra sobre las distintas partículas que lo constituyen. Como se verá en el capítulo 5, el peso debe aplicarse en el centro de gravedad del cuerpo. Cuando el cuerpo libre está constituido por varias partes, las fuerzas que dichas partes ejercen entre sí *no* deben incluirse entre las fuerzas externas; siempre que se considere completo al cuerpo libre, son fuerzas internas.
3. Las magnitudes y las direcciones de las *fuerzas externas* que son *conocidas* deben señalarse con claridad en el diagrama de cuerpo libre. Cuando se indiquen las direcciones de dichas fuerzas, se debe recordar que éstas son las ejercidas *sobre*, y no *por*, el cuerpo libre. Por lo general, las fuerzas externas conocidas incluyen el *peso* del cuerpo libre y las *fuerzas aplicadas* con un propósito en particular.
4. Las *fuerzas externas desconocidas* consisten en las *reacciones* a través de las cuales el suelo y otros cuerpos se oponen a un posible movimiento del cuerpo libre. Las reacciones lo obligan a permanecer en la misma posición y, por esta razón, algunas veces reciben el nombre de *fuerzas de restricción*. Las reacciones se ejercen en los puntos donde el cuerpo libre está *apoyado* o *conectado* a otros cuerpos y deben indicarse con claridad. Las reacciones se estudian con más detalle en las secciones 4.3 y 4.8.
5. El diagrama de cuerpo libre también debe incluir dimensiones, puesto que éstas se pueden necesitar para el cálculo de momentos de fuerzas. Sin embargo, cualquier otro detalle debe omitirse.



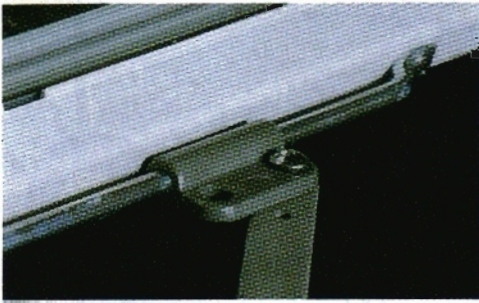
Fotografía 4.1 Un diagrama de cuerpo libre del tractor que se muestra en la foto incluiría todas las fuerzas externas que actúan sobre él: el peso del tractor, el peso de la carga en la pala y las fuerzas ejercidas por el suelo sobre las llantas.



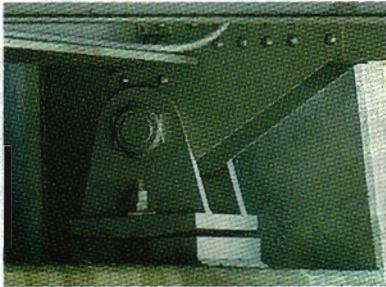
Fotografía 4.2 En el capítulo 6 se expondrá cómo determinar las fuerzas internas en estructuras hechas de varias piezas conectadas, como las fuerzas en los elementos que soportan la pala del tractor de la fotografía 4.1.



4.3. REACCIONES EN LOS PUNTOS DE APOYO Y CONEXIONES DE UNA ESTRUCTURA BIDIMENSIONAL



Fotografía 4.3 Cuando el eslabón del mecanismo de apertura del toldo para ventana se extiende, la fuerza que éste ejerce sobre el deslizador produce una fuerza normal aplicada sobre la barra, lo que causa que el toldo se abra.



Fotografía 4.4 El apoyo oscilatorio del estribo montado, que se muestra en la fotografía, se usa para apoyar el camino sobre un puente.



Fotografía 4.5 Se muestra la expansión del apoyo oscilatorio de un puente con plataforma de trabes. La superficie convexa del oscilador le permite al apoyo de la trabe moverse en forma horizontal.

En la primera parte de este capítulo se considera el equilibrio de una estructura bidimensional, esto es, se supone que la estructura que se está analizando y las fuerzas aplicadas sobre la misma están contenidas en el mismo plano. De la forma más clara, las reacciones necesarias para mantener a la estructura en la misma posición también estarán contenidas en el mismo plano.

Las reacciones ejercidas sobre una estructura bidimensional pueden ser divididas en tres grupos que corresponden a tres tipos de *apoyos* (puntos de apoyo) o *conexiones*:

1. *Reacciones equivalentes a una fuerza con una línea de acción conocida.* Los apoyos y las conexiones que originan reacciones de este tipo incluyen *rodillos*, *balancines*, *superficies sin fricción*, *eslabones o bielas* y *cables cortos*, *collarines sobre barras sin fricción* y *pernos sin fricción en ranuras lisas*. Cada uno de estos apoyos y conexiones pueden impedir el movimiento sólo en una dirección. Los apoyos mencionados anteriormente junto con las reacciones que producen se muestran en la figura 4.1. Cada una de estas reacciones involucra a una *sola incógnita*, es decir, la magnitud de la reacción; dicha magnitud debe representarse con una letra apropiada. La línea de acción de la reacción es conocida y debe indicarse con claridad en el diagrama de cuerpo libre. El sentido de la reacción debe ser como se muestra en la figura 4.1 para los casos de una superficie sin fricción (hacia el cuerpo libre) o de un cable (alejándose del cuerpo libre). La reacción puede estar dirigida en uno u otro sentido en el caso de rodillos de doble carril, eslabones, collarines sobre barras y pernos en ranuras. Por lo general, los rodillos de un carril y los balancines son reversibles y, por tanto, las reacciones correspondientes también pueden estar dirigidas en uno u otro sentido.
2. *Reacciones equivalentes a una fuerza de magnitud y dirección desconocidas.* Los apoyos y las conexiones que originan reacciones de este tipo incluyen *pernos sin fricción en orificios ajustados*, *articulaciones o bisagras* y *superficies rugosas*. Éstos pueden impedir la traslación del cuerpo rígido en todas direcciones pero no pueden impedir la rotación del mismo con respecto a la conexión. Las reacciones de este grupo involucran *dos incógnitas* que usualmente se representan por sus componentes x y y . En el caso de una superficie rugosa, la componente perpendicular a la superficie debe dirigirse alejándose de ésta.
3. *Reacciones equivalentes a una fuerza y un par.* Estas reacciones se originan por *apoyos fijos*, los cuales se oponen a cualquier movimiento del cuerpo libre y, por tanto, lo restringen por completo. Los soportes fijos producen fuerzas sobre toda la superficie de contacto; sin embargo, estas fuerzas forman un sistema que se puede reducir a una fuerza y un par. Las reacciones de este grupo involucran *tres incógnitas*, las cuales consisten en las dos componentes de la fuerza y en el momento del par.

Apoyo o conexión	Reacción	Número de incógnitas
 Rodillos o patines Balancín Superficie sin fricción	 Fuerza con línea de acción conocida	1
 Cable corto Eslabón corto	 Fuerza con línea de acción conocida	1
 Collarín sobre una barra sin fricción Perno sin fricción en una ranura lisa	 Fuerza con línea de acción conocida	1
 Perno sin fricción, articulación o bisagra Superficie rugosa	 Fuerza de dirección desconocida	2
 Apoyo fijo	 Fuerza y par	3

Figura 4.1 Reacciones en apoyos y conexiones.

Cuando el sentido de una fuerza o un par desconocido no es evidente, no se debe intentar determinarlo. En lugar de ello, se supondrá arbitrariamente el sentido de la fuerza o el par; el signo de la suposición obtenida indicará si la respuesta fue correcta o no.

4.4. EQUILIBRIO DE UN CUERPO RÍGIDO EN DOS DIMENSIONES

Las condiciones establecidas en la sección 4.1 para el equilibrio de un cuerpo rígido se vuelven más simples para casos de estructuras bidimensionales. Al seleccionar a los ejes x y y en el plano de la estructura, se tiene que

$$F_x = 0 \quad M_x = M_y = 0 \quad M_z = M_O$$

para cada una de las fuerzas aplicadas sobre la estructura. Por tanto, las seis ecuaciones de equilibrio derivadas en la sección 4.1 se reducen a

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma F_y = 0 \quad \Sigma M_O = 0 \quad (4.4)$$

y a las tres identidades triviales $0 = 0$. Como se debe cumplir que $\Sigma M_O = 0$ sin importar la elección del origen O , se pueden escribir las ecuaciones de equilibrio para una estructura bidimensional en la forma más general

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma F_y = 0 \quad \Sigma M_A = 0 \quad (4.5)$$

donde A es cualquier punto en el plano de la estructura. Las tres ecuaciones obtenidas pueden resolverse para un máximo de *tres incógnitas*.

En la sección anterior se vio que las fuerzas desconocidas incluyen reacciones y que el número de incógnitas correspondientes a una reacción depende del tipo de apoyo o conexión que origina dicha reacción. Como se hizo referencia en la sección 4.3, se observa que las ecuaciones de equilibrio (4.5) pueden ser empleadas para determinar las reacciones asociadas con dos rodillos y un cable, un apoyo fijo o un rodillo y un perno en un orificio ajustado, etcétera.

Observe la figura 4.2a, en la cual la armadura mostrada está sometida a las fuerzas dadas P , Q y S . La armadura se mantiene en su lugar por medio de un perno en A y un rodillo en B . El perno impide que el punto A se mueva ejerciendo una fuerza sobre la armadura que se puede descomponer en las componentes A_x y A_y ; por su parte, el rodillo impide que la armadura rote con respecto a A ejerciendo la fuerza vertical B . El diagrama de cuerpo libre de la armadura se muestra en la figura 4.2b; éste incluye tanto las reacciones A_x , A_y y B como las fuerzas aplicadas P , Q y S y el peso W de la armadura. Para expresar que la suma de los momentos con respecto a A , que implica todas las fuerzas mostradas en la figura 4.2b, es igual a cero, se escribe la ecuación $\Sigma M_A = 0$, la cual puede utilizarse para determinar la magnitud B puesto que dicha ecuación no contiene a A_x o a A_y . Después, para indicar que la suma de las componentes x y y de las fuerzas son iguales a cero, se escriben las ecuaciones $\Sigma F_x = 0$ y $\Sigma F_y = 0$, a partir de las cuales se obtienen, respectivamente, las componentes A_x y A_y .

Se podría obtener una ecuación adicional expresando que la suma de momentos de las fuerzas externas con respecto a un punto distinto de A es igual a cero. Por ejemplo, se podría escribir $\Sigma M_B = 0$. Sin embargo, una expresión de ese tipo no contendría ninguna información nueva, puesto que ya se ha establecido que el sistema de fuerzas mostrado en la figura 4.2b es equivalente a cero. Por tanto, la ecuación adicional *no sería independiente* y no podría utilizarse para determinar una cuarta incógnita. Sin embargo, esta ecuación serviría para verificar la solución obtenida a partir de las tres ecuaciones de equilibrio originales.

A pesar de que no se pueden *poner* ecuaciones *adicionales* a las tres ecuaciones de equilibrio originales, cualquiera de éstas puede ser

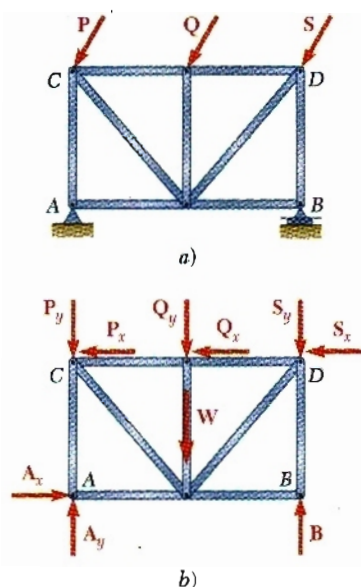


Figura 4.2

reemplazada por otra. De esta forma, un sistema alternativo de ecuaciones de equilibrio es

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma M_A = 0 \quad \Sigma M_B = 0 \quad (4.6)$$

donde el segundo punto con respecto al cual se suman los momentos (en este caso, el punto B) no puede estar ubicado en la línea paralela al eje y que pasa a través del punto A (figura 4.2b). Estas ecuaciones son condiciones suficientes para el equilibrio de la armadura. Las primeras dos ecuaciones indican que las fuerzas externas deben reducirse a una sola fuerza vertical en A . Como la tercera ecuación requiere que el momento de esta fuerza sea igual a cero con respecto al punto B , el cual no está sobre su línea de acción, la fuerza debe ser igual a cero y el cuerpo rígido está en equilibrio.

Un tercer posible conjunto de ecuaciones de equilibrio es

$$\Sigma M_A = 0 \quad \Sigma M_B = 0 \quad \Sigma M_C = 0 \quad (4.7)$$

donde los puntos A , B y C no son colineales (figura 4.2b). La primera ecuación requiere que las fuerzas externas se reduzcan a una sola fuerza en A ; la segunda ecuación requiere que esta fuerza pase a través de B y la tercera ecuación requiere que pase a través de C . Como los puntos A , B y C no son colineales, la fuerza debe ser igual a cero y el cuerpo rígido está en equilibrio.

La ecuación $\Sigma M_A = 0$, la cual expresa que la suma de los momentos de las fuerzas con respecto al perno A es igual a cero, posee un significado físico más definido que cualquiera de las otras dos ecuaciones (4.7). Éstas expresan una idea similar de balance pero lo hacen con respecto a puntos en los cuales el cuerpo rígido no está realmente articulado. Sin embargo, dichas ecuaciones son tan útiles como la primera y la selección de las ecuaciones de equilibrio no debe estar indebidamente influida por el significado físico de las mismas. De hecho, en la práctica será deseable elegir ecuaciones de equilibrio que contengan una sola incógnita, puesto que así se elimina la necesidad de resolver ecuaciones simultáneas. Es posible obtener ecuaciones de una sola incógnita al sumar momentos con respecto al punto de intersección de las líneas de acción de dos fuerzas desconocidas o, si dichas fuerzas son paralelas, sumar las componentes perpendiculares a esa dirección común. Por ejemplo, en la figura 4.3, en la cual la armadura mostrada se sostiene por rodillos en A y B y por un eslabón corto en D , las reacciones en A y B pueden eliminarse con la suma de las componentes x . Las reacciones en A y D se eliminan al sumar momentos con respecto a C , y las reacciones en B y D sumando momentos con respecto a D . Las ecuaciones obtenidas son

$$\Sigma F_x = 0 \quad \Sigma M_C = 0 \quad \Sigma M_D = 0$$

Cada una de estas ecuaciones contiene una sola incógnita.

4.5. REACCIONES ESTÁTICAMENTE INDETERMINADAS. RESTRICCIONES PARCIALES

En los dos ejemplos considerados en la sección anterior (figuras 4.2 y 4.3), los tipos de apoyos usados fueron tales que era imposible que el cuerpo rígido se moviera bajo la acción de las cargas dadas o bajo cualquier otra condición de carga. En casos como éstos, se dice que el cuerpo rígido tiene *restricción completa*. También se debe recordar que las

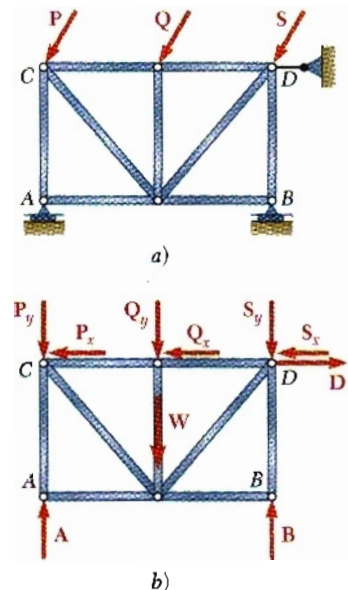


Figura 4.3

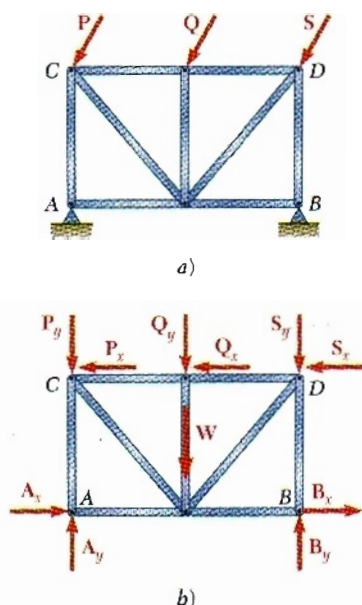


Figura 4.4 Reacciones estáticamente indeterminadas.

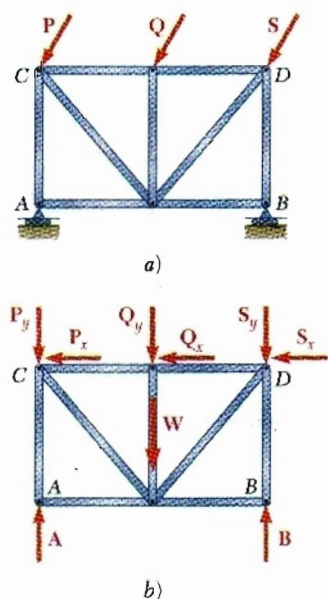


Figura 4.5 Restricciones parciales.

reacciones correspondientes a estos apoyos involucraban *tres incógnitas*, las cuales podrían determinarse resolviendo las tres ecuaciones de equilibrio. Cuando se presenta una situación como ésta, se dice que son reacciones *estáticamente determinadas*.

En la figura 4.4a la armadura mostrada se sostiene por pernos en A y B. Estos apoyos proporcionan más restricciones de las necesarias para evitar que la armadura se mueva bajo la acción de las cargas dadas o bajo cualquier otra condición de carga. También se observa a partir del diagrama de cuerpo libre de la figura 4.4b que las reacciones correspondientes involucran *cuatro incógnitas*. Puesto que, como se señaló en la sección 4.4, sólo están disponibles tres ecuaciones de equilibrio independientes, se tienen *más incógnitas que ecuaciones*; por tanto, no se pueden determinar todas las incógnitas. Mientras que las ecuaciones $\sum M_A = 0$ y $\sum M_B = 0$ proporcionan, respectivamente, las componentes verticales B_y y A_y , la ecuación $\sum F_x = 0$ sólo proporciona la suma $A_x + B_x$ de las componentes horizontales de las reacciones en A y B. Se dice que las componentes A_x y B_x son *estáticamente indeterminadas*. Éstas pueden determinarse considerando las deformaciones ocasionadas en la armadura por la condición de carga dada, pero este método está fuera del alcance de la estática y corresponde al estudio de la mecánica de materiales.

Los apoyos usados para sostener la armadura mostrada en la figura 4.5a consisten en los rodillos en A y B. Es evidente que las restricciones proporcionadas por estos apoyos no son suficientes para impedir que la armadura se mueva. Aunque se impide cualquier movimiento vertical, no hay nada que evite que la armadura pueda moverse en forma horizontal. Bajo estas circunstancias, se dice que la armadura tiene *restricción parcial*.[†] En la figura 4.5b se observa que las reacciones en A y B sólo involucran *dos incógnitas*. Como aún se tienen que cumplir tres ecuaciones de equilibrio, hay menos incógnitas que ecuaciones y, en general, una de las ecuaciones de equilibrio no se cumplirá. Mientras que las ecuaciones $\sum M_A = 0$ y $\sum M_B = 0$ se pueden cumplir por medio de una selección apropiada de las reacciones en A y B, la ecuación $\sum F_x = 0$ no será satisfecha a menos que la suma de las componentes horizontales de las fuerzas aplicadas sea igual a cero. Por tanto, no se puede mantener el equilibrio de la armadura de la figura 4.5 bajo condiciones generales de carga.

De lo anterior se concluye que si un cuerpo rígido tiene restricción completa y si las reacciones en sus apoyos son estáticamente determinadas, *entonces habrá tantas incógnitas como ecuaciones de equilibrio*. Cuando esta condición *no se cumple*, se tiene la certeza de que el cuerpo rígido no está completamente restringido o de que las reacciones en sus apoyos no son estáticamente determinadas; además, también es posible que el cuerpo rígido no esté completamente restringido y que las reacciones sean estáticamente indeterminadas.

Sin embargo, se debe señalar que la condición ya mencionada, aunque es *necesaria*, *no es suficiente*. En otras palabras, el hecho de que el número de incógnitas sea igual al número de ecuaciones no garantiza que el cuerpo tenga restricción completa o que las reacciones en sus apoyos son estáticamente determinadas. Observe la figura 4.6a en la cual la armadura mostrada se sostiene por medio de rodillos en A,

[†] En ocasiones se hace referencia a los cuerpos con restricción parcial como *inestables*. Sin embargo, para evitar confusiones entre este tipo de inestabilidad, debida a un número insuficiente de restricciones y el tipo de inestabilidad considerada en el capítulo 10, la cual está relacionada con el comportamiento de un cuerpo rígido cuando se perturba su equilibrio, se reservará el uso de las palabras *estable* e *inestable* para este último caso.

B y E. A pesar de que existen tres reacciones desconocidas A, B y E (figura 4.6b), la ecuación $\sum F_x = 0$ no se cumplirá a menos que la suma de las componentes horizontales de las fuerzas aplicadas resulte igual a cero. Aunque hay un número suficiente de restricciones, éstas no están ubicadas de manera apropiada y no existe ningún impedimento para que la armadura se mueva horizontalmente. En este caso, se dice que la armadura está *impropiamente restringida*. Como sólo quedan dos ecuaciones de equilibrio para determinar tres incógnitas, las reacciones serán estáticamente indeterminadas. Por tanto, las reacciones impropias también producen indeterminación estática.

Otro ejemplo de restricciones impropias —y de indeterminación estática— lo proporciona la armadura mostrada en la figura 4.7, la cual está sostenida por un perno en A y por rodillos en B y C, que en conjunto involucran cuatro incógnitas. Como sólo se dispone de tres ecuaciones de equilibrio independientes, las reacciones en los apoyos son estáticamente indeterminadas. Por otro lado, obsérvese que no se puede cumplir la ecuación $\sum M_A = 0$ bajo condiciones generales de carga puesto que las líneas de acción de las reacciones B y C pasan a través de A. Entonces, se concluye que la armadura puede rotar alrededor de A y, por ende, está impropioamente restringida.¹

Los ejemplos de las figuras 4.6 y 4.7 conducen a la conclusión de que un cuerpo rígido está impropioamente restringido siempre que los apoyos estén ubicados de tal forma que las reacciones sean concurrentes o paralelas,¹ aunque proporcionen un número suficiente de reacciones.

En resumen, para asegurarse de que un cuerpo rígido bidimensional está completamente restringido y de que las reacciones en sus apoyos son estáticamente determinadas, se debe verificar que las reacciones, involucren tres —y sólo tres— incógnitas y que los apoyos estén ubicados de manera que no requieran que las reacciones sean concurrentes o paralelas.

Los apoyos que involucran reacciones estáticamente indeterminadas deben utilizarse con cuidado en el *diseño* de estructuras y con pleno conocimiento de los problemas que pueden causar. Por otra parte, es usual que el *análisis* de estructuras con reacciones estáticamente indeterminadas se realice en forma parcial por medio de los métodos de la estática. Por ejemplo, en el caso de la armadura de la figura 4.4, las componentes verticales de las reacciones en A y B se obtuvieron a partir de las ecuaciones de equilibrio.

Por razones obvias, los apoyos que originan restricciones parciales o impropias se deben evitar en el diseño de estructuras estacionarias. Sin embargo, una estructura restringida en forma parcial o impropia no necesariamente se colapsará; bajo ciertas condiciones de carga en particular, se puede mantener el equilibrio. Por ejemplo, las armaduras de las figuras 4.5 y 4.6 estarán en equilibrio si las fuerzas aplicadas P, Q y S son verticales. Además, las estructuras diseñadas para moverse sólo deben estar parcialmente restringidas. Por ejemplo, un carro de ferrocarril sería de poca utilidad si estuviera completamente restringido por tener sus frenos aplicados en forma permanente.

¹ La rotación de la armadura con respecto a A requiere algo de "juego" en los apoyos en B y C. En la práctica siempre existirá dicho juego. Además, se observa que si el juego es mínimo, el desplazamiento de los rodillos B y C, y por tanto, las distancias desde A hasta las líneas de acción de las reacciones B y C, también serán pequeñas. Así, la ecuación $\sum M_A = 0$ requiere que B y C sean muy grandes, lo cual puede causar la falla de los apoyos en B y C.

¹ Debido a que esta situación surge por un arreglo o geometría inadecuados de los apoyos, comúnmente se hace referencia a la misma como *inestabilidad geométrica*.

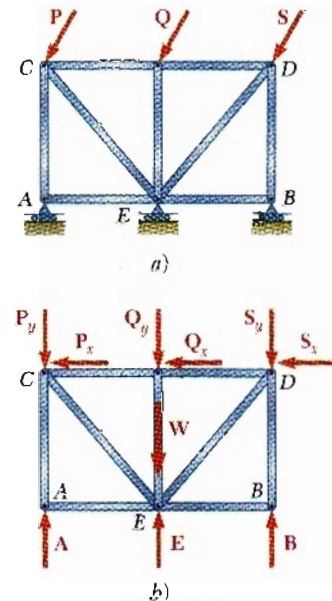


Figura 4.6 Restricciones impropias.

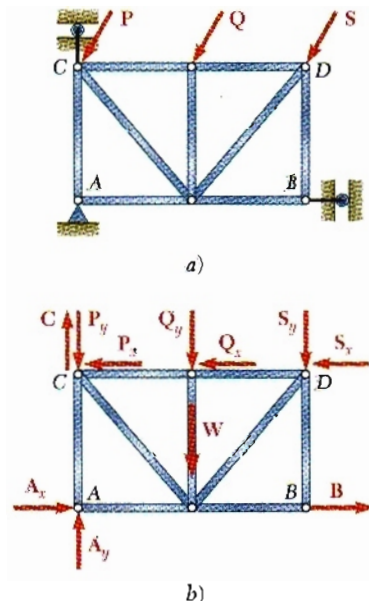
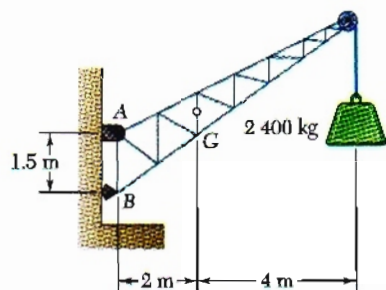


Figura 4.7 Restricciones impropias.



PROBLEMA RESUELTO 4.1

Una grúa fija tiene una masa de 1 000 kg y se usa para levantar una caja de 2 400 kg. La grúa se mantiene en su lugar por medio de un perno en A y un balancín en B. El centro de gravedad de la grúa está ubicado en G. Determine las componentes de las reacciones en A y B.

SOLUCIÓN

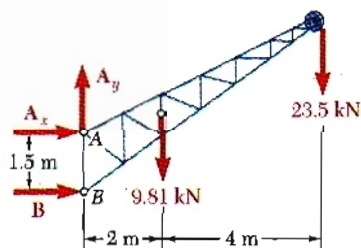


Diagrama de cuerpo libre. Se dibuja un diagrama de cuerpo libre de la grúa. Si multiplica las masas de la grúa y de la caja por $g = 9.81 \text{ m/s}^2$, se obtienen sus respectivos pesos, esto es, 9 810 N o 9.81 kN y 23 500 N o 23.5 kN. La reacción en el perno A es una fuerza con dirección desconocida; ésta se representa por sus componentes A_x y A_y . La reacción en el balancín B es perpendicular a su superficie; por tanto, dicha reacción es horizontal. Se supone que A_x , A_y y B actúan en las direcciones mostradas en la figura.

Determinación de B. Se expresa que la suma de los momentos de todas las fuerzas externas con respecto al punto A es igual a cero. La ecuación que se obtiene no contiene a A_x ni a A_y puesto que los momentos de A_x y A_y con respecto a A son iguales a cero. Si se multiplica la magnitud de cada fuerza por su distancia perpendicular a partir de A, se escribe

$$+\circlearrowleft \sum M_A = 0: \quad B(1.5 \text{ m}) - (9.81 \text{ kN})(2 \text{ m}) - (23.5 \text{ kN})(6 \text{ m}) = 0$$

$$B = +107.1 \text{ kN} \quad \mathbf{B = 107.1 \text{ kN} \rightarrow \blacktriangleleft}$$

Como el resultado es positivo, la reacción está dirigida en la forma que se supuso.

Determinación de A_x . La magnitud de A_x se determina con la suma de las componentes horizontales de todas las fuerzas externas, la cual es igual a cero.

$$+\rightarrow \sum F_x = 0: \quad A_x + B = 0$$

$$A_x + 107.1 \text{ kN} = 0$$

$$A_x = -107.1 \text{ kN} \quad \mathbf{A_x = 107.1 \text{ kN} \leftarrow \blacktriangleleft}$$

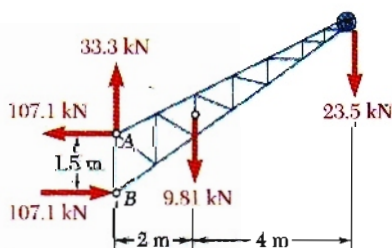
Como el resultado es negativo, el sentido de A_x es opuesto al que se había supuesto originalmente.

Determinación de A_y . La suma de las componentes verticales también debe ser igual a cero

$$+\uparrow \sum F_y = 0: \quad A_y - 9.81 \text{ kN} - 23.5 \text{ kN} = 0$$

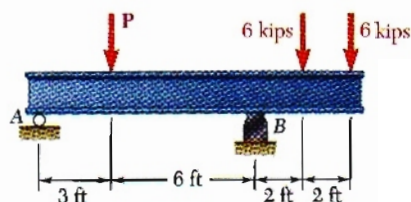
$$A_y = +33.3 \text{ kN} \quad \mathbf{A_y = 33.3 \text{ kN} \uparrow \blacktriangleleft}$$

Sumando vectorialmente las componentes A_x y A_y se encuentra que la reacción en A es 112.2 kN $\angle 17.3^\circ$.



Comprobación. Los valores obtenidos para las reacciones se pueden comprobar recordando que la suma de los momentos de todas las fuerzas externas con respecto a cualquier punto debe ser igual a cero. Por ejemplo, considerando al punto B, se escribe

$$+\circlearrowleft \sum M_B = -(9.81 \text{ kN})(2 \text{ m}) - (23.5 \text{ kN})(6 \text{ m}) + (107.1 \text{ kN})(1.5 \text{ m}) = 0$$



PROBLEMA RESUELTO 4.2

Se aplican tres cargas a una viga como se muestra en la figura. La viga se apoya en un rodillo en A y en un perno en B. Sin tomar en cuenta el peso de la viga, determine las reacciones en A y B cuando $P = 15$ kips.

SOLUCIÓN

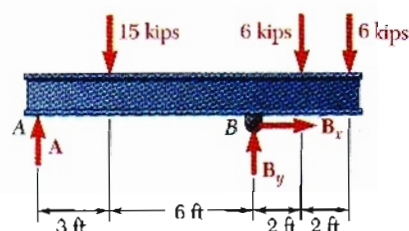


Diagrama de cuerpo libre. Se dibuja un diagrama de cuerpo libre de la viga. La reacción en A es vertical y se representa con A . La reacción en B se representa con las componentes B_x y B_y . Se supone que cada componente actúa en la dirección mostrada en la figura.

Ecuaciones de equilibrio. Se escriben las tres ecuaciones de equilibrio siguientes y se resuelven para las reacciones señaladas:

$$\rightarrow \Sigma F_x = 0: \quad B_x = 0 \quad B_x = 0 \quad \blacktriangleleft$$

$$\begin{aligned} +\uparrow \Sigma M_A = 0: \\ -(15 \text{ kips})(3 \text{ ft}) + B_y(9 \text{ ft}) - (6 \text{ kips})(11 \text{ ft}) - (6 \text{ kips})(13 \text{ ft}) = 0 \\ B_y = +21.0 \text{ kips} \quad B_y = 21.0 \text{ kips} \uparrow \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

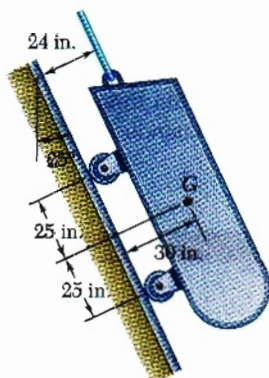
$$\begin{aligned} +\uparrow \Sigma M_B = 0: \\ -A(9 \text{ ft}) + (15 \text{ kips})(6 \text{ ft}) - (6 \text{ kips})(2 \text{ ft}) - (6 \text{ kips})(4 \text{ ft}) = 0 \\ A = +6.00 \text{ kips} \quad A = 6.00 \text{ kips} \uparrow \quad \blacktriangleleft \end{aligned}$$

Comprobación. Se comprueban los resultados sumando las componentes verticales de todas las fuerzas externas.

$$+\uparrow \Sigma F_y = +6.00 \text{ kips} - 15 \text{ kips} + 21.0 \text{ kips} - 6 \text{ kips} - 6 \text{ kips} = 0$$

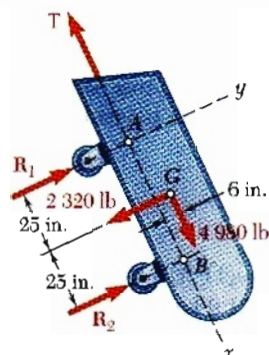
Observación. En este problema las reacciones en A y B son verticales; sin embargo, las razones de lo anterior son diversas. En A la viga se apoya en un rodillo; por tanto, la reacción no puede tener una componente horizontal. En B, la componente horizontal de la reacción es igual a cero debido a que se debe cumplir la ecuación de equilibrio $\Sigma F_x = 0$ y a que ninguna de las otras fuerzas que actúan sobre la viga tiene una componente horizontal.

A primera vista se hubiera podido observar que la reacción en B era vertical y se pudo haber omitido la componente horizontal B_x . Sin embargo, esta práctica no es conveniente. Al seguirla, se corre el riesgo de olvidar a la componente B_x cuando las condiciones de carga requieran su presencia (esto es, cuando se incluye una carga horizontal). Además, se encontró que la componente B_x es igual a cero utilizando y resolviendo una ecuación de equilibrio, $\Sigma F_x = 0$. Al dar por hecho que B_x es igual a cero, es posible no percatarse de que en realidad se ha hecho uso de esta ecuación y, por tanto, se podría perder la relación del número de ecuaciones disponibles para resolver el problema.



PROBLEMA RESUELTO 4.3

Un carro de carga se encuentra en reposo sobre un carril que forma un ángulo de 25° con respecto a la vertical. El peso total del carro y su carga es de 5 500 lb y éste actúa en un punto que se encuentra a 30 in. del carril y que es equidistante a los dos ejes. El carro se sostiene por medio de un cable que está unido a éste en un punto que se encuentra a 24 in. del carril. Determine la tensión en el cable y la reacción en cada par de ruedas.



SOLUCIÓN

Diagrama de cuerpo libre. Se dibuja el diagrama de cuerpo libre del carro. La reacción en cada rueda es perpendicular al carril y la fuerza de tensión T es paralela a éste. Por conveniencia se selecciona al eje x paralelo al carril y al eje y perpendicular al mismo. Entonces, el peso de 5 500 lb se descompone en sus componentes x y y .

$$W_x = +(5\,500 \text{ lb}) \cos 25^\circ = +4\,980 \text{ lb}$$

$$W_y = -(5\,500 \text{ lb}) \sin 25^\circ = -2\,320 \text{ lb}$$

Ecuaciones de equilibrio. Se toman momentos con respecto a A para eliminar a T y a R_1 de los cálculos.

$$+\sum M_A = 0: -(2\,320 \text{ lb})(25 \text{ in.}) - (4\,980 \text{ lb})(6 \text{ in.}) + R_2(50 \text{ in.}) = 0$$

$$R_2 = +1\,758 \text{ lb} \quad \blacktriangleleft$$

Ahora, tomando momentos con respecto a B para eliminar a T y a R_2 de los cálculos, se escribe

$$+\sum M_B = 0: (2\,320 \text{ lb})(25 \text{ in.}) - (4\,980 \text{ lb})(6 \text{ in.}) - R_1(50 \text{ in.}) = 0$$

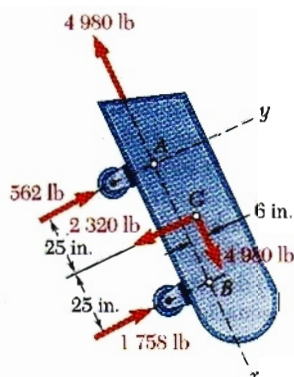
$$R_1 = +562 \text{ lb} \quad \blacktriangleleft$$

El valor de T se obtiene a partir de

$$+\sum F_x = 0: 4\,980 \text{ lb} - T = 0$$

$$T = +4\,980 \text{ lb} \quad \blacktriangleleft$$

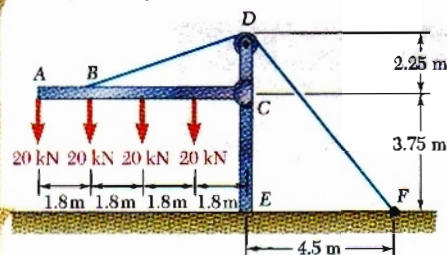
Los valores encontrados para las reacciones se muestran en el croquis adjunto.



Comprobación. Para corroborar los cálculos se escribe

$$+\sum F_y = +562 \text{ lb} + 1\,758 \text{ lb} - 2\,320 \text{ lb} = 0$$

También pudo haberse verificado la solución calculando los momentos con respecto a cualquier punto distinto de A o de B.



PROBLEMA RESUELTO 4.4

El marco mostrado en la figura sostiene una parte del techo de un pequeño edificio. Se sabe que la tensión en el cable es de 150 kN, determine la reacción en el extremo fijo E.

SOLUCIÓN

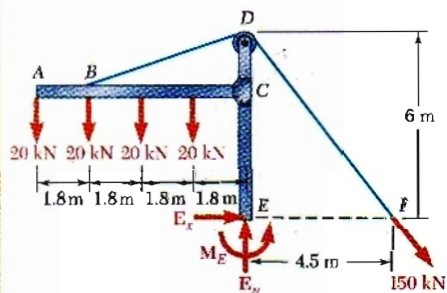
Diagrama de cuerpo libre. Se dibuja el diagrama de cuerpo libre del marco junto con el cable BDF. La reacción en el extremo fijo E está representada con las componentes de fuerza E_x y E_y y por el par M_E . Las otras fuerzas que actúan sobre el diagrama de cuerpo libre son las cuatro cargas de 20 kN y la fuerza de 150 kN ejercida en el extremo F del cable.

Ecuaciones de equilibrio. Observe que $DF = \sqrt{(4.5 \text{ m})^2 + (6 \text{ m})^2} = 7.5 \text{ m}$, se escribe

$$\begin{aligned} \rightarrow \Sigma F_x = 0: \quad E_x + \frac{4.5}{7.5}(150 \text{ kN}) &= 0 \\ E_x &= -90.0 \text{ kN} \quad E_x = 90.0 \text{ kN} \leftarrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} +\uparrow \Sigma F_y = 0: \quad E_y - 4(20 \text{ kN}) - \frac{6}{7.5}(150 \text{ kN}) &= 0 \\ E_y &= +200 \text{ kN} \quad E_y = 200 \text{ kN} \uparrow \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} +\curvearrowright \Sigma M_E = 0: \quad (20 \text{ kN})(7.2 \text{ m}) + (20 \text{ kN})(5.4 \text{ m}) + (20 \text{ kN})(3.6 \text{ m}) \\ + (20 \text{ kN})(1.8 \text{ m}) - \frac{6}{7.5}(150 \text{ kN})(4.5 \text{ m}) + M_E &= 0 \\ M_E &= +180.0 \text{ kN} \cdot \text{m} \quad M_E = 180.0 \text{ kN} \cdot \text{m} \curvearrowright \end{aligned}$$



PROBLEMA RESUELTO 4.5

Un peso de 400 lb se une a la palanca mostrada en la figura en el punto A. La constante del resorte BC es $k = 250 \text{ lb/in.}$ y éste no se encuentra deformado cuando $\theta = 0$. Determine la posición de equilibrio.

SOLUCIÓN

Diagrama del cuerpo libre. Se dibuja el diagrama de cuerpo libre de la palanca junto al cilindro. Represente con s la elongación del resorte a partir de la posición en que éste no se encuentra deformado y observe que $s = r\theta$, se tiene que $F = ks = kr\theta$.

Ecuación de equilibrio. Sumando los momentos de W y de F con respecto a O , se escribe

$$+\curvearrowright \Sigma M_O = 0: \quad Wl \sin \theta - r(kr\theta) = 0 \quad \sin \theta = \frac{kr^2}{Wl} \theta$$

Sustituyendo los datos numéricos que fueron proporcionados se obtiene

$$\sin \theta = \frac{(250 \text{ lb/in.})(3 \text{ in.})^2}{(400 \text{ lb})(8 \text{ in.})} \theta \quad \sin \theta = 0.703\theta$$

Al resolver numéricamente, se encuentra

$$\theta = 0 \quad \theta = 80.3^\circ \leftarrow$$

